

Л. А. КАЛУЖНИН

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА?

В5-2-66



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга является популярным изложением математической логики, приобретающей все большее значение в связи с развитием автоматизации производственных процессов. В отличие от имеющихся книг по математической логике данная книга не требует для своего понимания знаний, превосходящих школьный курс математики. Книга рассчитана на инженеров и работников, занимающихся вопросами автоматики. Она также будет полезна всем, кто хочет ознакомиться с основами математической логики.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга популярно излагает основы математической логики. Необходимость такой книги вызвана тем, что в настоящее время все большее значение приобретает автоматизация производственных процессов. Программа КПСС прямо указывает на важность автоматизации для создания материально-технической базы коммунизма. Математическая логика является теоретической основой кибернетики, а эта последняя в свою очередь применяется для решения проблем автоматизации.

Несмотря на важность математической логики, в нашей стране почти нет книг, излагающих основы этой науки. Имеющиеся у нас книги по математической логике рассчитаны на читателя, достаточно математически подготовленного. Между тем необходимо создать такую книгу, которая давала бы представление о математической логике и в то же время не требовала бы для своего понимания большего, чем школьный курс математики. Данная книга, по-моему, решает эту задачу.

Конечно, в рамках данной книги невозможно исчерпывающе ответить на вопрос: что такое математическая логика? Но мне кажется, что, прочтя данную книгу, читатель сможет составить себе некоторое представление о том, чем занимается эта наука, и о проблемах, возникающих в ней.

Книга состоит из трех глав. В главе I строится логика высказываний как теория булевых функций, т. е. функций, аргументы которых принимают два значения — «истинно» и «ложно», и которые сами принимают эти же два значения. В этой главе показано также применение логики высказываний в теории автоматов и в теории релейно-контактных схем. В главе II рассматриваются

тождественно истинные формулы логики высказываний. В главе III излагается логика предикатов, являющаяся более глубокой областью логики. Естественно, что подробное рассмотрение логики предикатов в рамках небольшой популярной книги невозможно; поэтому основное внимание уделено операциям логики предикатов (в частности, кванторам), а также применению логики предикатов в силлогистике Аристотеля и для формализации математических теорий.

В заключение приведен очерк развития исследований по основаниям математики. Разумеется, он не претендует на полноту, но, по-видимому, представляет интерес не только для впервые знакомящихся с математической логикой, но и для тех, кто владеет основами этой науки.

В конце книги читатель найдет список литературы, которая позволит ему глубже ознакомиться с современными достижениями в области математической логики. Большинство из указанных в этом списке книг и статей достаточно трудны для неподготовленного читателя и потребуют от него упорной работы.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время мы являемся свидетелями небывалого роста науки. На наших глазах формируются новые области знания, а уже существующие научные дисциплины распространяют свое влияние и находят себе применение при решении проблем, далеких от тех задач, из которых они возникли. Еще очень недавно многие мыслители выражали опасение, что развитие науки идет по пути все большей и большей специализации, вследствие чего возникает опасность все большего и большего разобщения характерных для разных наук принципов и методов научных исследований. Однако за последние два десятилетия мы явно наблюдаем также и противоположную тенденцию: все больший интерес привлекают те направления, которые вскрывают общее в науках, на первый взгляд далеких друг от друга, служа тем самым делу их сближения. Дальнейшее развитие этой тенденции сулит в недалеком будущем новые небывалые успехи как в области чистой, так и в области прикладной науки. Особое место в этой связи играет новая область знания — кибернетика, к которой примыкает ряд современных разделов математики: теория информации, теория игр, исследование операций, математическая статистика, математическая логика и др.

Идеи кибернетики — науки о преобразовании информации для целей управления сложными системами — приобретают сейчас исключительное значение по двум причинам¹⁾. Во-первых, принципы кибернетики применимы

¹⁾ Мы не собираемся в данной книге подробно останавливаться на рассмотрении основных принципов и применений кибернетики и отсылаем читателя к обширной литературе, появившейся в последние годы и трактующей этот комплекс вопросов.

в одинаковой мере к самым различным разделам науки и техники: к биологии, математике, медицине, лингвистике, химии, педагогике, экономике, юриспруденции, теории автоматизации, телеуправления и т. д. В этом смысле кибернетика лежит в основе тенденций синтеза научных знаний. Во-вторых, созданные и создаваемые на базе радиоэлектронной техники кибернетические машины являются мощным инструментом, впервые в развитии человечества позволяющим с помощью технических приспособлений осуществлять процессы, считавшиеся до сих пор уделом исключительно умственной деятельности человека.

XIX в. и первая половина XX в. знаменуются широким внедрением сперва паровых, а затем электрических машин в процесс производства материальных благ для человеческого общества. Это явление зачастую называют технической революцией: машины, создаваемые на базе использования физических сил природы, во много раз приумножили физические силы человека и тем самым во много раз увеличили производительность труда.

Всем внимательно наблюдающим сегодняшнее развитие науки и техники вполне ясно, что во второй половине XX в. мы находимся на начальном этапе новой, второй технической революции. Ее результатом будет усиление умственных способностей человека на базе кибернетической техники. Уже сейчас ясно, что значение этой второй научно-технической революции для развития человеческого общества будет еще больше, чем первой.

Коммунистическая партия и Советское правительство правильно подметили эту тенденцию и всемерно ее поощряют. Новый большой скачок в увеличении производительности труда, который ожидается от развернутого и широкого применения кибернетической науки и техники, является одной из необходимых предпосылок для создания изобилия материальных благ в грядущем коммунистическом обществе.

Уже сейчас мы наблюдаем возрастающий интерес к теоретическим основам кибернетики среди представителей самых различных отраслей человеческой деятельности и знания. Нужно всячески приветствовать этот интерес и стремиться познакомить широкие круги советского общества с теми пока малоизвестными разделами науки, которые здесь особенно важны. К ним не в последнюю оче-

редь относится математическая логика — тема предлагаемой книги.

Что такое математическая логика? Как и из каких задач она возникла? Каких она достигла результатов? Каково современное состояние этой науки? Каковы дальнейшие перспективы ее развития? В нашей небольшой книге мы постараемся частично ответить на эти вопросы. Сделать это в популярной форме в настоящее время сравнительно трудно. Дело в том, что до самого последнего времени математическая логика была уделом очень узкого круга специалистов-математиков и развивалась для целей исследования оснований математики; никакого опыта в популярном изложении основ этой науки пока нет. С другой стороны, объем достигнутых результатов, идей и методов здесь довольно велик и требует для своего правильного понимания серьезной математической подготовки. Поэтому то немногое, что будет здесь сказано о математической логике, принадлежит к самым элементарным ее разделам и относится ко всей этой науке приблизительно так, как элементарная школьная математика к разделам высшей математики. Но нам кажется, что знание и правильное понимание и этих элементарных разделов достаточно важно и полезно.

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Элементы логики высказываний

Для того чтобы составить хотя бы приблизительное представление о какой-нибудь области знаний, недостаточно сказать, как и почему эта область возникла. Необходимо познакомиться с некоторыми разделами этой области. Только после этого можно уяснить себе ее цели, задачи и трудности, возникающие на пути их решения. Мы собираемся поэтому рассказать читателю о нескольких разделах математической логики. Естественно, что такое ознакомление следует начинать с самых элементарных разделов. Поэтому мы и начнем с изложения простейшей главы — *логики высказываний*. Логика высказываний лежит в основе всех других разделов математической логики и необходима для их понимания.

Логика высказываний строится так же, как и многочисленные математические теории. В качестве основных понятий берется некоторый класс объектов, а также некоторые свойства, отношения и операции над этими объектами. Эти основные понятия рассматриваются как исходные, не требующие внутри самой теории какого-либо определения. С другой стороны, они выбираются не произвольным образом, а так, чтобы соответствовать тому нематематическому содержанию, которое должна описывать математическая теория. Основные понятия теории обычно поясняются на примерах.

Основным объектом изучения логики высказываний служат простые высказывания, например,

- 1) «Число 100 делится на 4»;
- 2) «Число 5 больше числа 3»;

- 3) «Число 17 делится на 8»;
- 4) «Число 30 больше числа 70»;
- 5) «Не все учащиеся хорошо учатся»;
- 6) «Луна больше Земли» и т. д.

Из простых высказываний путем некоторого числа логических операций можно строить сложные высказывания. Этим логическим операциям соответствуют в обычной речи такие выражения, как «и», «или», «если,..., то», «не» и др. Например, из простых высказываний:

- (1) «Радиостанция работает»,
- (2) «Наш радиоприемник включен»,
- (3) «Наш радиоприемник настроен на волну радиостанции»,
- (4) «Мы находимся у радиоприемника»,
- (5) «Мы слушаем радиопередачу»

можно построить сложное высказывание:

- (6) «(Радиостанция работает) и (наш радиоприемник включен) и (наш приемник настроен на волну радиостанции) и (мы находимся у радиоприемника) и (мы слушаем радиопередачу)».

Приведем другие примеры образования сложных высказываний из простых.

Из простых высказываний:

«В бензоколонке шофер может получить бензин»

и «В бензоколонке шофер может получить автол»

можно составить сложное высказывание:

«(В бензоколонке шофер может получить бензин) или (в бензоколонке шофер может получить автол)».

Из простого высказывания

«5 делит 7»

мы можем с помощью частицы «не» составить высказывание — его естественно считать сложным — «5 не делит 7». Для большей ясности этому сложному высказыванию естественно придать вид:

«Неверно, что (5 делит 7)».

На первых ступенях изучения логики высказываний обычно не обращают внимания на содержание простых высказываний, а интересуются лишь их истинностью или ложностью. Так, очевидно, приведенные выше

высказывания 1), 2), 5) являются истинными, а 3), 4), 6) — ложными.

Заметим, что о высказываниях, употребляемых нами в повседневной жизни, зачастую трудно бывает сказать, являются ли они истинными или ложными. Так, например, простое высказывание типа *«Расстояние от Земли до Солнца равно 150 000 000 км»* некоторые будут считать ложным, так как, конечно, указанная цифра не точна (да, кроме того, расстояние от Земли до Солнца не постоянно, а меняется в некоторых пределах). Другие сочтут это высказывание истинным в связи с тем, что цифру 150 000 000 они с самого начала будут рассматривать как некоторое приближение, вполне приемлемое на практике. Бывают и такие высказывания, об истинности или ложности которых нельзя говорить без предварительного уточнения этих высказываний. Так, высказывание типа *«Сегодня хорошая погода»* может быть и истинным, и ложным в зависимости от того, где и когда оно делается. Для того чтобы придать этому высказыванию вполне определенное значение истинности, нужно установить место и время, в которые оно делается.

Всякая точная наука, в данном случае математическая логика, абстрагируется от многих побочных явлений в изучаемых ею объектах и рассматривает в некоторой мере идеализированную картину. Напомним, что геометрия рассматривает точки, лишенные геометрических размеров, и линии, лишенные толщины.

Как уже указывалось, на первых ступенях изучения логики высказываний обычно считают, что все простые высказывания, входящие в рассмотрение, обладают в точности одним из двух свойств: быть истинным или быть ложным. Математические утверждения как раз обладают этим свойством, и так как до сих пор математическая логика изучала в первую очередь логику математических доказательств, то такая абстракция особенно оправдана.

Ясно, что сложные высказывания, получаемые из простых, будут опять истинными или ложными, причем их истинность или ложность — в дальнейшем мы будем говорить *«их значение истинности»* — зависит при этом только от истинности или ложности образующих простых высказываний. Основная задача логики высказываний состоит в изучении этой зависимости.

§ 2. Логические операции

Обсудим более подробно логические операции, позволяющие строить сложные высказывания из простых. В обычной речи логические операции часто называют *логическими связками*. Для изучения логических операций полезно пользоваться некоторой системой символических обозначений; эти обозначения позволяют делать рассуждения более строгими. Условимся обозначать простые высказывания малыми буквами латинского алфавита: a , b , c , ... и т. д. Значения истинности будем сокращенно обозначать русскими буквами $и$ для «истинно» и $л$ для «ложно».

Простейшей операцией логики высказываний является операция *отрицания*, соответствующая в обычном языке частице «не». Эту операцию (логическую связку) мы обозначим знаком \neg ¹⁾. Если a — некоторое высказывание, например, «пять делит семь», то $\neg a$ — новое, сложное высказывание «пять не делит семь» (или «*неверно, что пять делит семь*»). Высказывание $\neg a$ читается так: «не a ».

Легко видеть, что если a — истинное высказывание, то $\neg a$ будет ложным высказыванием, и наоборот, если a ложно, то $\neg a$ истинно. Этот факт кладется в основу определения логической операции \neg . Действие операции отрицания представим в виде следующей таблицы истинности для отрицания:

a	$\neg a$
$и$	$л$
$л$	$и$

Именно эту таблицу мы и примем в качестве определения операции отрицания. Подобными таблицами мы будем пользоваться и при определении других логических операций. Они называются *таблицами* (или *матрицами*) *истинности*. Их употребление очень удобно, и

¹⁾ Зачастую высказывание $\neg a$ обозначается также \bar{a} . Такое обозначение особенно принято в электротехнике, где эта операция называется *инверсией*.

они широко применяются во многих разделах математической логики.

В качестве второй операции рассмотрим операцию конъюнкции, соответствующую союзу «и». Обозначается конъюнкция символом « \wedge », который ставится между высказываниями. Если a и b — высказывания, то $a \wedge b$ — сложное высказывание (читается « a и b ») ¹⁾. При этом действие операции конъюнкции определяется так: сложное высказывание $a \wedge b$ истинно в том и только в том случае, если оба высказывания a и b имеют значение u , т. е. $u \wedge u = u$, но $u \wedge l = l$; $l \wedge u = l$; $l \wedge l = l$. Как видно, это определение вполне соответствует смыслу союза «и». Действительно, простые высказывания «6 делится на 3», «10 больше, чем 5» истинны, а «3 делится на 7», «3 больше, чем 7» — ложны, поэтому сложное высказывание

«6 делится на 3 и 10 больше, чем 5»

будет истинным, а сложные высказывания

«6 делится на 3 и 3 больше, чем 7»,

«3 делится на 7 и 10 больше, чем 5»,

«3 делится на 7 и 3 больше, чем 7»

являются ложными.

Указанные правила действия для операции конъюнкции сводятся в следующую таблицу истинности для конъюнкции:

$a \backslash b$	u	l
u	u	l
l	l	l

Третья операция, которая употребляется в логике высказываний, соответствует союзу «или». Но здесь сразу следует отметить то обстоятельство, что союз «или» имеет в русском языке (и во многих других европейских языках) два различных значения. В одном случае мы говорим об *исключающем «или»*, в другом — о *неисключающем «или»*. Разница состоит в следующем. Если мы имеем два выска-

¹⁾ Операция конъюнкции называется иногда, особенно в приложениях математической логики, *логическим умножением* и обозначается тогда, как в алгебре и в арифметике, знаком « \cdot » или вообще никак не обозначается.

звания a и b и оба высказывания ложны, то, несомненно, сложное высказывание « a или b » следует считать ложным. Если a истинно, а b ложно (или a ложно, а b истинно), то также понятно, что « a или b » следует рассматривать как истинное; это вполне соответствует смыслу слова «или» в русском языке. Но как следует рассматривать сложное высказывание « a или b », если a и b оба истинны: как истинное или как ложное? Например, «6 делится на 3» и «3 меньше, чем 6» — два истинных высказывания. Считать ли сложное высказывание «6 делится на 3 или 3 меньше, чем 6» истинным или ложным? В обычном языке «или» понимается иногда в одном, иногда в другом смысле. В первом случае, когда указанное высказывание считается истинным, мы говорим, что мы имеем дело с неисключающим «или», во втором случае — с исключающим. Логическая операция, соответствующая неисключающему «или», в логике высказываний называется *дизъюнкцией*. Мы ее будем обозначать знаком « \vee ». Из вышеприведенных рассмотрений мы имеем для нее следующее определение:

Если a и b — два высказывания, то их дизъюнкция $a \vee b$ (читается « a или b ») — сложное высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания a и b . Согласно этому определению мы имеем следующую таблицу истинности для операции дизъюнкции:

$a \backslash b$	$и$	$л$
$и$	$и$	$и$
$л$	$и$	$л$

Примеры дизъюнкции: из высказываний «5 больше 3» и «2 больше 3» образуется сложное высказывание «5 больше 3 или 2 больше 3», из высказываний «2 меньше 1» и «3 меньше 2» образуется сложное высказывание «2 меньше 1 или 3 меньше 2»¹⁾.

¹⁾ В приложениях дизъюнкцию называют обыкновенно *логическим сложением* и вместо знака \vee употребляют иногда знак $+$.

Часто знаком $+$ обозначается операция, соответствующая исключающему «или», см. сноску на стр. 35.

Рассмотренные операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции (инверсии, логического умножения и логического сложения) называются булевыми операциями. Они являются основными в применениях логики высказываний в электронике, автоматике и теории вычислительных устройств.

Приведем для полноты таблицу истинности для логической операции, соответствующей исключающему «или»:

$a \backslash b$	u	$л$
u	$л$	u
$л$	u	$л$

Одной из важнейших операций логики высказываний является *импликация*. В качестве знака для этой операции мы будем употреблять символ « \rightarrow ».

Импликация определяется следующим образом:

Если a и b — два высказывания, то $a \rightarrow b$ (читается « a имплицитно b ») — сложное высказывание, которое истинно всегда, кроме того случая, когда a истинно, а b ложно.

Тем самым операция импликации описывается следующей таблицей истинности для импликации:

$a \backslash b$	u	$л$
u	u	$л$
$л$	u	u

В импликации $a \rightarrow b$ первый член a называется *антецедентом*, второй b — *консеквентом*.

Операция \rightarrow до некоторой степени соответствует союзу «если..., то ...». Но следует сказать о том, что это соответствие весьма приблизительно.

Если мы будем рассматривать импликацию как соответствие союзу «если ..., то...», то согласно определению имеем, например,

«Если дважды два — четыре, то трижды три — девять» истинно;

«Если дважды два — пять, то трижды три — девять» истинно;

«Если дважды два — пять, то трижды три — восемь» истинно и только

«Если дважды два — четыре, то трижды три восемь» ложно.

Это еще согласуется в какой-то мере с общепринятым пониманием союза «если ..., то...».

Но возьмем для построения сложных высказываний « $a \rightarrow b$ » такие простые высказывания:

«Сократ — грек» — u ;

«Наполеон — грек» — $л$;

«Дважды два — четыре» — u ;

«Дважды два — пять» — $л$.

Интерпретируя импликацию как союз «если ..., то...», получаем такие утверждения:

«Если Сократ — грек, то дважды два четыре» истинно;

«Если Наполеон — грек, то дважды два — четыре» истинно;

«Если Наполеон — грек, то дважды два — пять» истинно;

«Если Сократ — грек, то дважды два — пять» ложно.

Как видно, эти утверждения совсем не соответствуют привычному употреблению союза «если..., то...». Причина такого несоответствия в основном следующая. Как это часто происходит в обычной речи, некоторые слова (а также словосочетания и целые предложения) имеют не одно, а много различных значений, зависящих от того, в какой связи данное языковое выражение употребляется. Так это происходит и с союзом «если ..., то...». Анализом его различных значений занимались крупнейшие логики со времен Древней Греции и по сей день. Мы не имеем возможности в рамках нашей книги останавливаться на этом слишком подробно¹).

Отметим только для примера такие употребления выражения «если a , то b ».

¹) Подробнее о связи импликации с союзом «если..., то...» и о различных видах импликации можно узнать из статьи «Импликация», напечатанной во II томе «Философской энциклопедии».

а) «Если мы нагреваем некоторое тело, то оно (это тело) увеличивается в объеме».

Здесь «если ..., то...» описывает причинно-следственную связь между *a* и *b* («Мы нагреваем тело» — причина, «тело увеличивается в объеме» — следствие).

б) Несколько иной смысл союз «если ..., то...» имеет в следующем предложении:

«(Если все люди смертны и Сократ человек), то (Сократ смертен)».

Здесь «если ..., то...» выражает отношение логического следования *b* из *a*: «Сократ — смертен» логически следует из посылки

«Все люди смертны и Сократ человек».

Несмотря на существенную разницу в понимании смысла союза «если ..., то...» в случае а) (причинно-следственная связь) и б) (логическое следование), и в том и в другом случае в содержании «если ..., то...» имеется одна общая черта: союз указывает на некоторую связь между содержанием высказывания *a* и высказывания *b*.

Логика высказываний обычно отвлекается от содержания простых высказываний и рассматривает только их значения истинности. Тем самым логические операции обычно не выражают связи между содержанием высказываний. Логическая операция, образующая из двух высказываний *a* и *b* сложное высказывание, определяет, таким образом, только отношение между значениями истинности высказываний *a* и *b* и значением истинности составленного из них сложного высказывания.

Отвлечемся от содержания высказываний «если *a*, то *b*» и зададим вопрос, какая логическая операция лучше всего соответствует союзу «если ..., то...». Оказывается, высказывание «если *a*, то *b*» можно понимать, как «*b* или не *a*» (т. е. $\neg a \vee b$). В таком понимании примеры а) и б) переписываются так:

а') «(Тело увеличивается в объеме) или (неверно, что мы нагреваем тело)»;

б') «(Сократ смертен) или (неверно, что все люди смертны и Сократ — человек).

Можно отметить некоторое соответствие между высказываниями а') и а), а также между б') и б). Обратим внимание теперь на то, что $\neg a \vee b$ ложно тогда, когда $\neg a$ ложно

и b ложно, т. е. когда a истинно и b ложно, а в остальных случаях $\neg(a \vee b)$ истинно. Итак, таблица истинности для $\neg(a \vee b)$ совпадает с таблицей истинности для $a \rightarrow b$. Тем самым высказывание $a \rightarrow b$ можно считать соответствием для «если a , то b ».

В ряде случаев удобно понимать высказывание $a \rightarrow b$ как $\neg(a \wedge \neg b)$. Такое понимание импликации подчеркивает именно тот факт, что при истинности $a \rightarrow b$ не может случиться, чтобы a было истинным, а b ложным. Это соответствует важному свойству импликации, которое заключается в том, что истина не может имплицировать ложь.

В §3 гл. II мы убедимся в том, что это свойство импликации играет важную роль в логике высказываний.

К такому примерно пониманию импликации пришел древнегреческий логик Филон из Мегары (IV в. до н. э.). Учение об этой логической операции, получившей название *материальная импликация*, уточнялось и развивалось в Древней Греции в мегаро-стоической школе (IV и III вв. до н. э.), в логике схоластов и в трудах других логиков вплоть до наших дней. Вышеприведенное определение этой операции оказалось исключительно плодотворным. Как мы увидим в дальнейших главах, в несколько расширенном понимании импликация способна довольно хорошо передавать смысл логического следования (пример б)).

Но мы еще раз хотели бы подчеркнуть, что высказывание « $a \rightarrow b$ » не совпадает по смыслу с высказыванием «если a , то b ». Поэтому, во избежание недоразумений, уместно читать сложное высказывание « $a \rightarrow b$ » не «если a , то b », а « a имплицирует b » и понимать эту операцию только так, как это установлено соответствующей таблицей истинности.

Введем, наконец, еще одну логическую операцию — *эквивалентность*. Мы ее будем обозначать знаком \sim . Сложное высказывание « $a \sim b$ » читается: « a эквивалентно b ». Эквивалентность определяется так:

Сложное высказывание « $a \sim b$ » истинно, если a истинно и b истинно или если a ложно и b ложно. Во всех других случаях « $a \sim b$ » ложно.

Иначе говоря, « $a \sim b$ » истинно в том и только в том случае, если оба высказывания a и b имеют одно и то же значение истинности. Тем самым эквивалентность

описывается следующей таблицей истинности для эквивалентности:

$a \backslash b$	u	$л$
u	u	$л$
$л$	$л$	u

Эквивалентность примерно соответствует употреблению выражения «тогда и только тогда, когда»; « $a \sim b$ » соответствует в обычной речи высказыванию « a тогда и только тогда, когда b ». Но, так же как и для импликации и «если..., то ...», это соответствие далеко не полное. О связи логической операции эквивалентности и языкового выражения «тогда и только тогда, когда» можно в основном повторить то, что было сказано о связи импликации с «если ..., то...».

Употребляя все пять введенных логических операций, можно, подобно тому как это делается в алгебре с помощью символов $+$, $-$, \cdot , строить сколь угодно сложные выражения. Например,

- 1) $(a \vee b) \wedge c$;
- 2) $a \vee (b \wedge c)$;
- 3) $(a \vee \neg a) \wedge (b \rightarrow a)$;
- 4) $((a \wedge b) \rightarrow c) \sim \neg a$;
- 5) $((a \rightarrow b) \vee \neg b) \sim (a \wedge c) \vee (d \wedge c)$.

Наряду со знаками для логических операций \neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \sim , латинскими буквами a , b , c , d ,... для обозначения высказываний, в приведенных формулах участвуют еще в качестве вспомогательных знаков $(,)$ — открывающая и закрывающая скобки. Так же, как в алгебре и в арифметике, они служат для указания последовательности, в которой следует выполнять операции. Например, выражения $a \cdot (b + c)$ и $(a \cdot b) + c$ имеют различный смысл. Первое означает: умножить a на то, что получается, если сложить b и c , второе — прибавить c к тому, что получается, если умножить a на b . Как известно, результаты этих двух последовательностей операций будут, вообще говоря, различны: $3 \times (2 + 1) = 9$; $(3 \times 2) + 1 = 7$. В точности так же, скажем, $a \wedge (b \vee c)$ и $(a \wedge b) \vee c$ — два различных

сложных высказывания: при некоторых значениях истинности высказываний a , b и c значения истинности этих сложных высказываний будут различны; например, если a ложно, b ложно, c истинно, то $a \wedge (b \vee c)$ примет значение $л \wedge (л \vee и) = л$, а $(a \wedge b) \vee c$ — значение $(л \wedge л) \vee и = и$. Таким образом, расстановка скобок в формулах логики высказываний является очень существенной.

Читатель легко уяснит себе, как подсчитывается значение истинности сложных высказываний вроде тех, которые мы привели выше.

Пусть, например, мы имеем выражение

$$(((a \rightarrow b) \vee \neg b) \sim (a \wedge c)) \vee (d \wedge c).$$

Нужно подсчитать его значение истинности для значений

$$a — и, \quad b — л, \quad c — л, \quad d — и.$$

Подставляем вместо букв эти значения истинности. Получаем

$$(((и \rightarrow л) \vee \neg л) \sim (и \wedge л)) \vee (и \wedge л).$$

Операции производятся в том порядке, как это указано расстановкой скобок. Применение каждой операции производится согласно таблице истинности для этой операции. Таким образом, получаем

$$и \rightarrow л = л, \quad \neg л = и,$$

следовательно,

$$(и \rightarrow л) \vee \neg л = л \vee и = и;$$

далее

$$и \wedge л = л;$$

так что

$$(((и \rightarrow л) \vee \neg л) \sim (и \wedge л)) = и \sim л = л;$$

и опять

$$(и \wedge л) = л;$$

и, наконец,

$$(((и \rightarrow л) \vee \neg л) \sim (и \wedge л)) \vee (и \wedge л) = л \vee л = л.$$

Значение истинности всего выражения — мы будем говорить значение истинности формулы логики высказываний — будет зависеть от значений истинности входящих в нее букв, обозначающих простые высказывания. Мы рекомендуем читателю вычислить значение истинности данного

сложного высказывания для некоторых других наборов значений истинности составляющих его простых высказываний.

Приведем еще, ради примера, значения истинности формулы

$$(((a \wedge b) \rightarrow c) \vee \neg a) \sim (a \wedge c)$$

для всевозможных наборов значений истинности простых высказываний a , b и c :

a	b	c	$(((a \wedge b) \rightarrow c) \vee \neg a) \sim (a \wedge c)$
$и$	$и$	$и$	$и$
$и$	$и$	$л$	$и$
$и$	$л$	$и$	$и$
$и$	$л$	$л$	$л$
$л$	$и$	$и$	$л$
$л$	$и$	$л$	$л$
$л$	$л$	$и$	$л$
$л$	$л$	$л$	$л$

Мы сразу представили значения истинности сложного высказывания в зависимости от значений истинности простых высказываний a , b , c в удобном табличном виде. Вычисления проводятся так же, как мы это указывали выше, и читатель их легко проверит. В подобном табличном виде можно представить значения истинности любой формулы логики высказываний.

§ 3. Булевы функции

Из всего сказанного видно, что всякую формулу логики высказываний можно рассматривать как представление некоторой функции: всякому набору значений истинности букв — каждая буква может принимать одно

из двух значений u или l — согласно формуле однозначно соответствует некоторое значение истинности — u или l — всего сложного высказывания, представленного этой формулой. Таким образом, мы можем и будем иногда всякую формулу рассматривать как выражение для функции. Например, формула

$$(((a \wedge b) \rightarrow c) \vee \neg a) \sim (a \wedge c) = f(a, b, c)$$

выражает функцию от переменных a, b, c .

Такая точка зрения вполне соответствует в элементарной алгебре понятию функции, представленной буквенной формулой. В алгебре формулы

$$f_1(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 8x$$

или

$$f_2(x, y, z) = x + 2y + z^2$$

представляют функции от переменных x, y, z . Это означает, что всякий раз, когда мы вместо букв-переменных x, y, z подставляем некоторые числа (например, $x = 1, y = 2, z = 1$), то и вся формула принимает некоторое вполне определенное числовое значение (в нашем случае $f_1(1, 2, 1) = (1 + 2 + 1)^2 - 3 \cdot 1 = 13$; $f_2(1, 2, 1) = 1 + 2 \cdot 2 + 1^2 = 6$). Разница в том, что если в элементарной алгебре рассматриваются числовые функции (т. е. и переменные, и функция принимают числовые значения), то в логике высказываний рассматриваются так называемые логические (булевы) функции, в которых как каждая переменная (a, b, c и т. д.), так и сама функция, выражаемая некоторой формулой, принимает только одно из двух значений — истинно «и» или ложно «л». При этом логические операции ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$) аналогичны алгебраическим операциям сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и др. Условимся переменные, принимающие значения u или l , называть булевыми переменными.

Формулы (скажем, $a \vee (b \wedge c)$) логики высказываний можно, как мы видим, понимать двумя различными способами:

1. a, b, c могут быть сокращенными обозначениями некоторых определенных (постоянных) высказываний

(скажем, a — «5 делит 10», b — «3 меньше 2», c — «5 — нечетное число»). Тогда сложная формула $(a \vee (b \wedge c))$ является сокращенной записью некоторого определенного сложного высказывания (в нашем случае «(5 делит 10) или (3 меньше 2 и 5 нечетное число)»).

2. Буквы выступают в роли переменных; вместо них можно подставлять произвольные высказывания и получать каждый раз сложные высказывания, зависящие от подставленных простых высказываний. В силу того, что логика высказываний обычно учитывает не содержание, а только значение истинности высказываний, мы считаем, что переменные высказывания принимают только два значения: «и» и «л». В таком понимании формула представляет некоторую булеву функцию.

Заметим, что для буквенных формул элементарной алгебры мы также различаем оба эти понимания: в некоторых случаях буквы рассматриваются как сокращения некоторых постоянных чисел (c — скорость света, \hbar — постоянная Планка и др.); в других случаях они рассматриваются как переменные. Для различения этих двух случаев в элементарной алгебре принято обозначать постоянные начальными буквами латинского алфавита: a, b, c , а переменные — последними буквами латинского алфавита: x, y, z . Подобным же образом, во избежание недоразумений, если мы хотим подчеркнуть, что сложную формулу следует рассматривать как представление булевой функции, мы будем употреблять последние буквы латинского алфавита x, y, z или — для формул с большим числом переменных — мы будем употреблять буквы x, y с индексами: x_1, x_2, \dots и y_1, y_2, \dots .

Для формул логики высказываний, рассматриваемых как булевы функции, мы определим ряд важных свойств и понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Нетрудно указать ряд формул, которые принимают значение $и$ при любых значениях истинности входящих в них переменных. Таковыми будут, например, формулы

$$\begin{aligned} &(x \vee \neg x); \\ &(x \rightarrow (y \rightarrow x)); \\ &((x \wedge \neg x) \rightarrow (x \wedge y)) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Мы рекомендуем читателю проверить с помощью таблиц

истинности для логических операций, что указанные формулы действительно обладают этим свойством. Такие формулы называются *тождественно истинными формулами* или *тавтологиями логики высказываний*. В следующей главе мы более подробно остановимся на значении тождественно истинных формул в процессе логических заключений.

Рассматриваются также формулы, принимающие значение *л* при всех значениях переменных: они называются *тождественно ложными формулами*. Примерами таких формул являются

$$x \wedge \neg x;$$

$$(x \rightarrow (y \rightarrow x)) \sim (y \wedge \neg y);$$

$$\neg((x \wedge \neg x) \rightarrow (x \wedge y))$$

и др.

Легко заметить, что если $A(x, y, z)$ — какая-нибудь тождественно истинная формула, построенная из букв x, y, z с помощью знаков логических операций, то формула $\neg A(x, y, z)$ (т. е. та формула, которая получается, если выписать полностью формулу, обозначенную $A(x, y, z)$, и поставить перед этой формулой знак \neg) будет тождественно ложной формулой и наоборот.

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы представляют *постоянные* булевы функции, принимающие только одно значение: их значение не зависит от переменных, входящих в формулу. Все остальные формулы не постоянные: для некоторых значений булевых переменных они принимают значение *и*, для других — *л*. Формулы, приведенные нами на стр. 18 представляют именно такие непостоянные булевы функции.

Две различные формулы могут представлять одну и ту же булеву функцию; таблицы истинности таких формул будут совпадать. Так, например, легко можно проверить, что формула

$$((x \sim y) \rightarrow (x \wedge z))$$

и формула

$$(((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee (x \wedge z))$$

представляют одну и ту же булеву функцию $f(x, y, z)$ с таблицей истинности:

x	y	z	$f(x, y, z)$
u	u	u	u
u	u	$л$	$л$
u	$л$	u	u
u	$л$	$л$	u
$л$	u	u	u
$л$	u	$л$	u
$л$	$л$	u	$л$
$л$	$л$	$л$	$л$

Две формулы A и B , представляющие одну и ту же булеву функцию, называются *равносильными*. Этот факт записывают с помощью знака \equiv следующим образом: $A \equiv B$. Например,

$$((x \sim y) \rightarrow (x \wedge z)) \equiv (((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee (x \wedge z)).$$

Равносильность двух формул можно проверить так: всем буквам, входящим в формулы, придаются независимо друг от друга всевозможные значения истинности и вычисляется значение истинности обеих формул. Формулы равносильны, если их значения истинности при любом наборе значений истинности входящих в них переменных совпадают, и они не равносильны, если их значения различны по крайней мере для одного набора значений истинности переменных. Некоторые переменные могут входить только в одну из формул. Тогда значение истинности той формулы, в которую эта переменная не входит, не зависит от значения истинности, придаваемого этой переменной. Например, $x \vee y \equiv ((z \vee \neg z) \rightarrow (x \vee y))$. Переменная z не входит в левую формулу $x \vee y$. Ее значение, например, для значений $x = u$, $y = л$, $z = u$ и для значений $x = u$, $y = л$, $z = л$ будет одно и то же, а именно u . Указан-

ную равносильность нетрудно проверить. Как левая, так и правая часть формулы представляет одну и ту же булеву функцию $f(x, y, z)$ с таблицей истинности

x	y	z	$f(x, y, z)$
u	u	u	u
u	u	$л$	u
u	$л$	u	u
u	$л$	$л$	u
$л$	u	u	u
$л$	u	$л$	u
$л$	$л$	u	$л$
$л$	$л$	$л$	$л$

Эта функция в действительности зависит только от x и y .

Равносильность формул логики высказываний аналогична тождествам элементарной алгебры, известным из курса средней школы. Например,

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + y^2 + 2xy, \quad (x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \quad \text{и т. д.}$$

И там тождественное равенство двух различных формульных выражений означает, что они принимают одинаковые числовые значения, какие бы числа мы не подставляли вместо переменных x, y, z . Только, конечно, тождественное равенство формул элементарной алгебры нельзя проверить простым методом проб, так как пришлось бы подставлять вместо переменных неограниченное число возможных числовых значений переменных и доказательство тождественного равенства формул никогда бы не закончилось. Тот факт, что равносильность формул логики высказываний можно проверить непосредственно, существенно связан с тем, что переменные, входящие в формулу, могут принимать только конечное число значений. Правда, это число может быть на практике довольно большим.

Действительно, если в некоторую формулу A входят n переменных, то, так как каждая переменная может независимо от других принимать два значения («и» или «л»), вся совокупность переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) может принимать 2^n значений. Это число быстро растет с ростом n : для десяти переменных возможно 1024 набора, для 30 переменных уже больше 1 000 000 000. Причем нужно сказать, что особенно в приложениях логики высказываний, как правило, встречаются формулы с большим числом переменных: десятки, сотни и тысячи переменных. Вычисление всех значений истинности таких формул становится очень трудоемкой задачей. В элементарной алгебре тождественные равенства формул устанавливаются — и там это иначе и невозможно — использованием небольшого числа основных тождеств — законов, связывающих между собой арифметические операции. Такими законами являются, например, ассоциативные законы

$$x(yz) \equiv (xy)z, \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

дистрибутивный закон $x(y + z) = xy + xz$ и многие другие, которые мы не будем все выписывать. Они позволяют преобразовывать буквенные формулы элементарной алгебры в другие формулы, равные им тождественно. Оказывается, что подобным же образом можно поступать и в логике высказываний. Мы скоро познакомимся с основными законами, позволяющими производить такие преобразования.

В первую очередь отметим тот факт, что набор введенных нами логических операций является сильно избыточным: некоторые операции можно выразить через другие.

С помощью таблиц истинности читатель легко проверит, что эквивалентность просто выражается через импликацию и конъюнкцию. А именно, имеет место следующая равносильность:

$$x \sim y \equiv ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)). \quad (1)$$

Таким образом, в любой формуле мы можем повсюду исключить знак \sim и выразить его согласно (1) через \rightarrow и \wedge , и новая формула будет равносильна исходной. Будем, например, исходить из формулы

$$(x \sim y) \sim (x \wedge y). \quad (*)$$

Выражая знак \sim через \rightarrow и \wedge согласно (1), получим

$$\begin{aligned}(x \sim y) \sim (x \wedge y) &\equiv ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \sim (x \wedge y) \equiv \\ &\equiv (((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \rightarrow (x \wedge y)) \wedge \\ &\quad \wedge (((x \wedge y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))). \quad (**)\end{aligned}$$

Далее, импликацию можно выразить с помощью отрицания и дизъюнкции на основании следующей, легко проверяемой равносильности:

$$x \rightarrow y \equiv \neg x \vee y. \quad (2)$$

Таким образом, для любой формулы можно указать равносильную ей формулу, содержащую только знаки \neg , \vee , \wedge . Для примера преобразуем нашу формулу (**), исключая знак \rightarrow :

$$\begin{aligned}(((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \rightarrow (x \wedge y)) \wedge \\ \wedge (((x \wedge y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)))) \equiv (\neg((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)) \vee \\ \vee (x \wedge y)) \wedge (\neg(x \wedge y) \vee ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x))).\end{aligned}$$

Очень часто, особенно в приложениях логики высказываний к электротехнике, пользуются формулами, содержащими только три знака логических операций: \wedge , \vee , \neg . Как мы видим, этого вполне достаточно, так как другие логические операции можно выразить через них.

Наконец, оказывается, что дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание и, наоборот, конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание. Это можно сделать с помощью равносильностей, называемых *законами де Моргана* (их опять-таки легко проверить с помощью таблиц истинности):

$$\neg(x \vee y) \equiv (\neg x \wedge \neg y) \quad (3)$$

и

$$\neg(x \wedge y) \equiv (\neg x \vee \neg y) \quad (4)$$

и, кроме того, с помощью так называемого закона снятия двойного отрицания:

$$\neg \neg x \equiv x. \quad (5)$$

Действительно,

$$x \vee y \equiv \neg \neg(x \vee y) \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \quad (6)$$

и, аналогично,

$$x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y). \quad (7)$$

Таким образом, всякую формулу логики высказываний можно заменить на равносильную ей и содержащую только знаки \neg и \wedge (или \vee и \neg). Для нашего примера (**) имеем

$$((x \sim y) \sim (x \wedge y)) \equiv (\neg((\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(y \wedge \neg x)) \wedge \neg(x \wedge y)) \wedge \neg \neg((x \wedge y) \wedge \neg(\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(y \wedge \neg x)))).$$

Можно показать, что дальше по этому пути идти нельзя: существуют формулы, которые не равносильны формулам, записываемым только с помощью \neg , или \wedge , или \vee .

Тем примечательней, что можно указать некоторую операцию логики высказываний, которую мы до сих пор не вводили, с помощью которой можно выразить все известные нам операции \neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \sim . Эта операция называется «штрих Шеффера»; для нее употребляется знак $|$ ($a|b$ читается « a штрих Шеффера b »). Она определяется следующей таблицей истинности для штриха Шеффера:

$a \backslash b$	$и$	$л$
$и$	$л$	$и$
$л$	$и$	$и$

Согласно этой таблице сложное высказывание $a|b$ истинно всегда, кроме того случая, когда a истинно и b истинно. Довольно просто на основании таблицы истинности для $|$ видны следующие равносильности:

$$\neg x \equiv (x|x) \quad (8)$$

и

$$x \wedge y \equiv ((x|y)|(x|y)). \quad (9)$$

Они показывают, что конъюнкцию и отрицание можно выразить через штрих Шеффера, а, как нам уже известно, через отрицание и конъюнкцию можно выразить все остальные логические операции.

Рекомендуем читателю проверить вышеуказанные преобразования и, для того чтобы окончательно усвоить принцип замены одних операций другими, преобразовать несколько наугад выбранных формул, записанных

с помощью знаков \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \sim в равносильные им формулы, записанные только с помощью знаков \neg , \wedge или только с помощью \neg . Например, преобразовать формулу $((x \rightarrow y) \wedge \neg z)$ к равносильной ей формуле, записанной только с помощью штриха Шеффера.

Естественно возникает вопрос: если логические операции могут быть сведены к двум (\neg , \wedge) или даже только к одной (\neg), то зачем же логика высказываний пользуется многими операциями? Это имеет несколько причин. Мы отметим следующие:

а) Читатель, наверное, уже заметил, что при исключении знаков операций формулы становятся более длинными и менее обозримыми. Ведь и в элементарной алгебре можно было бы, по-видимому, обойтись без целочисленных показателей степени и вместо, скажем, x^{10} писать $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$. Ясно, что это мало способствовало бы обозримости и удобочитаемости формул. Избыточность в обозначениях не всегда является недостатком.

б) Как мы увидим в следующей и в дальнейших главах, введенные нами операции \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \sim играют определенную роль при описании закономерностей логических заключений. Особенно это относится к операции \rightarrow .

в) Излагаемый нами раздел логики высказываний, базирующийся на понятиях значения истинности и таблиц истинности, далеко не исчерпывает проблематику логики высказываний. Он является одним из самых элементарных ее разделов. Имеются другие области, в которых не все приведенные равносильности между логическими операциями имеют место и тем самым в них не всегда допустимы указанные нами выражения одних операций через другие. Сюда относятся такие разделы, как интуиционистское исчисление высказываний, различные исчисления так называемой строгой импликации и др. В рамках нашей книги мы не можем и не будем на этом останавливаться.

Аналогично тому, как мы это сделали для операций \wedge и \neg , можно показать, что все логические операции можно выразить через \vee и \neg , а также через \rightarrow и \neg . Вообще, в основу построения логики высказываний можно положить самые различные наборы операций, заданных своими таблицами истинности. Такие операции не обязательно должны быть одноместными, как \neg , или двуместными, как \wedge , \vee , \rightarrow : они могут зависеть от 3, 4 и большего числа

переменных. Представляет большой интерес вопрос о том, какие наборы при этом выражаются через другие. Этот вопрос представляет интерес как для теоретических вопросов логики, так и особенно для применения логики высказываний в теории и практике построения электронных автоматических устройств и быстродействующих вычислительных машин. Этому вопросу посвящено много исследований. Для ознакомления с относящейся сюда тематикой можно рекомендовать статью С. В. Яблонского «Функциональные построения в k -значной логике», Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51.

§ 4. Нормальные формы. Алгебра Буля

Приведенными равносильностями, служащими для выражения одних логических операций через другие, далеко не исчерпывается набор основных равносильностей, позволяющих упрощать формулы (или, точнее, заменять формулы равносильными и более простыми). Ограничимся случаем формул, содержащих только знаки \wedge , \vee , \neg . Они называются булевыми формулами. Укажем основные, относящиеся к ним равносильности.

Коммутативные законы:

$$(x \vee y) \equiv (y \vee x); \quad (x \wedge y) \equiv (y \wedge x). \quad (1)$$

Ассоциативные законы:

$$(x \vee (y \vee z)) \equiv ((x \vee y) \vee z); \quad (x \wedge (y \wedge z)) \equiv ((x \wedge y) \wedge z). \quad (2)$$

Законы идемпотентности:

$$(x \vee x) \equiv x; \quad (x \wedge x) \equiv x. \quad (3)$$

Дистрибутивные законы:

$$\begin{aligned} (x \vee (y \wedge z)) &\equiv ((x \vee y) \wedge (x \vee z)); \\ (x \wedge (y \vee z)) &\equiv ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)). \end{aligned} \quad (4)$$

Законы де Моргана:

$$\neg(x \vee y) \equiv (\neg x \wedge \neg y); \quad \neg(x \wedge y) \equiv (\neg x \vee \neg y). \quad (5)$$

Закон двойного отрицания:

$$\neg \neg x \equiv x. \quad (6)$$

Коммутативный закон позволяет переставлять рядом стоящие выражения, связанные знаком \vee (булевы слагаемые) или знаком \wedge (булевы множители). Согласно

ассоциативному закону можно опускать скобки между любым числом членов, связанных одинаковыми знаками (\vee или \wedge), и вместо, скажем,

$$(((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \vee (x \vee (y \wedge z)))$$

писать

$$((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee x \vee (y \wedge z)),$$

и наоборот. С помощью законов идемпотентности одинаковые выражения, связанные знаками \wedge или \vee , можно заменять одним. Например,

$$((x \vee \top y) \wedge (x \vee \top y) \wedge (x \vee \top y)) \equiv (x \vee \top y).$$

Закон двойного отрицания разрешает опускать два рядом стоящие знака \top , если они непосредственно предшествуют некоторой формуле, скажем,

$$\top \top (x \wedge y) \equiv (x \wedge y).$$

Законы де Моргана используются для того, чтобы вносить знак \top в скобку, в которой стоят члены, объединенные знаками \vee или \wedge . При этом знак \vee переходит в \wedge , а знак \wedge — в \vee . Например,

$$\top ((x \vee y) \wedge z) \equiv (\top (x \vee y) \vee \top z),$$

а также

$$\top ((x \wedge y) \vee (y \wedge z)) \equiv (\top (x \wedge y) \wedge \top (y \wedge z)).$$

Полезно, наконец, для сокращения тождественно истинных формул ввести знак I , а тождественно ложных формул — знак L . Заметим, что все тождественно истинные формулы от любого числа переменных равносильны между собой и то же самое имеет место для тождественно ложных формул. Так как в рассматриваемых нами равносильных преобразованиях мы можем заменять равносильные формулы друг на друга, то можно представить себе, что мы выбрали какую-нибудь тождественно истинную формулу, например $(x \vee \top x)$, и обозначили ее через I и какую-нибудь тождественно ложную, например $(x \wedge \top x)$, и обозначали ее через L . Тогда мы имеем еще следующие равносильности:

$$(x \vee \top x) \equiv I, \quad (7a) \quad (x \wedge \top x) \equiv L, \quad (76)$$

$$(x \vee I) \equiv I, \quad (8a) \quad x \wedge L \equiv L, \quad (86)$$

$$(x \vee L) \equiv x, \quad (9a) \quad x \wedge I \equiv x, \quad (96)$$

$$\top I \equiv L, \quad (10a) \quad \top L \equiv I. \quad (106)$$

Указанные равносильности позволяют приводить любые булевы формулы к некоторому простому стандартному виду. Такое упрощение вполне аналогично приведению в элементарной алгебре формул, выражающих целые рациональные функции (т. е. формул, построенных с помощью операций $+$, $-$, \cdot), к сумме произведений раскрытием скобок и приведением подобных членов.

Укажем, как приводится булева формула к стандартному виду. Применение правил будем пояснять на примере формулы

$$F = \neg((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg z)).$$

Сначала (возможно многократным) применением законов де Моргана и закона снятия двойного отрицания можно добиться того, чтобы знаки \neg повсюду непосредственно предшествовали буквам:

$$\begin{aligned} \neg((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg z)) &\equiv (\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(y \wedge \neg z)) \equiv \\ &\equiv ((\neg x \vee \neg \neg y) \wedge (\neg y \vee \neg \neg z)) \equiv ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z)). \end{aligned}$$

Теперь многократным применением дистрибутивного закона знаки \wedge вносятся в скобки:

$$\begin{aligned} F &\equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \equiv ((\neg x \wedge (\neg y \vee z)) \vee (y \wedge (\neg y \vee z))) \equiv \\ &\equiv (((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z)) \vee ((y \wedge \neg y) \vee (y \wedge z))). \end{aligned}$$

Законы ассоциативности позволяют опустить ненужные скобки:

$$F \equiv ((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)).$$

Законы (76) и (86) позволяют заменить конъюнкции, в которых встречается некоторая буква вместе с ее отрицанием, на букву \neg , а согласно (9а) букву \neg в дизъюнкции можно опустить. Итак, в нашем примере имеем окончательно:

$$\begin{aligned} F &\equiv ((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee \neg y \vee (y \wedge z)) \equiv \\ &\equiv ((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge z)). \end{aligned}$$

Теперь в каждой конъюнкции никакая буква не встречается вместе со своим отрицанием. Если в какой-либо конъюнкции некоторая буква x, y, z, \dots или $\neg x, \neg y, \neg z, \dots$ встречается несколько раз — в нашем примере этого не произошло, — то согласно закону идемпотентности дос-

точно в этой конъюнкции оставить только по одному экземпляру каждой такой буквы. Например,

$$((x \wedge x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg y \wedge z)) \equiv \\ \equiv ((x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z)).$$

Таким образом, всякая булева формула (а следовательно, как видно из § 3, и всякая формула логики высказываний) может быть приведена к равносильной ей формуле следующего простого стандартного вида:

Дизъюнкция членов, каждый из которых представляет собой конъюнкцию отдельных различных букв со знаком \neg или без него; ни в какой конъюнкции не встречается буква вместе со своим отрицанием. Дополнительно можно сказать, что все конъюнктивные члены различны между собой. (Иначе, учитывая закон идемпотентности, из одинаковых конъюнктивных членов можно было бы опустить все, кроме одного.)

Нужно отметить еще один частный случай, который может встретиться в процессе упрощения. А именно, может оказаться, что после раскрытия скобок согласно законам дистрибутивности все конъюнктивные члены нужно заменить на знак L . Тогда и всю формулу нужно заменить на L . Например,

$$((x \wedge y \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg x) \vee (y \wedge z \wedge \neg z)) \equiv L \vee L \vee L \equiv L.$$

Исходная формула была тождественно ложной.

Приведенная нами стандартная форма булевых формул называется *дизъюнктивной нормальной формой*. Заметим, что вполне аналогично можно было бы доказать, что всякая булева формула равносильна некоторой булевой формуле, являющейся конъюнкцией членов, каждый из которых представляет собой дизъюнкцию букв со знаком \neg или без него. Такая форма называется *конъюнктивной нормальной формой*.

Читатель, наверное, уже заметил, что знаки \wedge и \vee ведут себя вполне симметрично. Выписывая основные равносильности, мы их расположили так, чтобы было видно, что всякой равносильности со знаком \wedge отвечает в точности одна равносильность со знаком \vee . Более общо, с помощью правил де Моргана можно было бы доказать следующий принцип двойственности:

Отрицание некоторой булевой формулы A , у которой знаки \neg стоят непосредственно перед буквами, равносильно

формуле, получающейся из формулы A заменой знаков \wedge и \vee друг на друга и заменой всякой буквы x на $\neg x$ и наоборот. Например,

$$\neg(((x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y)) \wedge (z \vee \neg y)) \equiv \\ \equiv (((\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee (\neg z \wedge y)).$$

С другой стороны, так как из равносильности двух формул A и B ($A \equiv B$) следует равносильность их отрицаний ($\neg A \equiv \neg B$) и наоборот, то вышеуказанному принципу двойственности можно придать такую форму:

Всякая равносильность булевых формул, у которых знак отрицания непосредственно стоит перед буквами, сохраняется, если повсюду заменить знаки \wedge и \vee друг на друга, каждую букву a на выражение $\neg a$ и наоборот.

Из того немногого, что мы сообщили о логике высказываний, видно, что она представляет собой нечто аналогичное буквенной элементарной алгебре, но имеющее свои характерные и на первых порах непривычные закономерности. Эта логика называется *булевой алгеброй*.

Эта алгебра возникла в середине прошлого столетия. В основном она восходит к работам Дж. Буля и называется поэтому его именем. Правда, Буль употреблял не дизъюнкцию, а логическую операцию, соответствующую исключающему «или», т. е. операцию со следующей таблицей истинности:

$a \backslash b$	u	l
u	l	u
l	u	l

В наших обозначениях эта операция (будем ее записывать знаком $+_2$) выражается через \wedge , \vee и \neg следующим образом:

$$(x +_2 y) \equiv ((x \vee y) \wedge \neg (x \wedge y)).$$

Более удобную связку ∇ ввел в употребление английский логик Джевонс, и булева алгебра примерно в том виде, как мы ее представили, была разработана дальше английским логиком Венном, американским логиком Ч. Пирсом

(1839—1914), немецким математиком Э. Шрёдером (1841—1902) и др. Особенно большой вклад в это развитие внес русский математик и логик П. С. Порецкий (1846—1907). В начале XX в. интерес к дальнейшей разработке булевой алгебры несколько ослаб в связи с тем, что внимание специалистов математической логики сконцентрировалось на ряде других существенных вопросов в связи с разработкой проблем оснований математики. За последние 20—30 лет вновь наблюдается большой интерес к булевой алгебре, в первую очередь объясняющийся все возрастающим значением этого раздела логики в автоматике и кибернетике: оказывается, что закономерности булевой алгебры, по сути дела еще мало изученные, играют в этой области основную роль. В одной из следующих глав мы вернемся к этому вопросу.

Заметим, наконец, что к исходной идее Буля использовать операцию $+_2$ вместо \vee вернулся в 20—30-х гг. нашего века советский математик и логик И. И. Жегалкин (1869—1947). Оказалось, что для ряда вопросов соответствующее исчисление — *алгебра Жегалкина* — обладает рядом преимуществ; для других вопросов рассмотренная нами алгебра Буля более удобна¹⁾.

Мы еще должны остановиться на одном важном вопросе логики высказываний. Как мы знаем, всякая формула логики высказываний представляет некоторую булеву функцию. Возникает обратный вопрос: можно ли всякую булеву функцию представить некоторой формулой логики высказываний? Ответ на этот вопрос положителен. Можно указать процедуру, которая позволяет по таблице истинности произвольной булевой функции от любого числа переменных построить некоторую формулу логики высказываний и даже сразу формулу в дизъюнктивной нормальной форме, представляющую данную булеву функцию.

Идею этой процедуры мы поясним на примере булевых функций от трех переменных x, y, z ; общий случай булевых функций от любого числа переменных вполне аналогичен.

Сначала рассмотрим частный случай булевых функций, принимающих значение u только для одного-единственного набора значений истинности своих переменных.

¹⁾ Жегалкин рассматривает значения истинности u и l как числа 1 и 0 соответственно. Операция $+_2$ в этом случае соответствует обычному сложению в арифметике вычетов по модулю 2; этим объясняется обозначение для этой операции.

Если выписать таблицу истинности такой булевой функции, то она только в одном месте будет иметь букву *и*, а во всех остальных местах букву *л*. Такой булевой функцией будет, например, функция $f(x, y, z)$, представленная следующей таблицей истинности:

x	y	z	$f(x, y, z)$
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>

Нетрудно указать формулу, представляющую эту функцию. Такой формулой будет $(\neg x \wedge y \wedge \neg z)$. Действительно, конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все выражения, объединенные знаками \wedge . Значит, наша конъюнкция будет истинна в том и только в том случае, когда все выражения $\neg x, y, \neg z$ истинны. А это в свою очередь означает, что она будет истинна только в том случае, когда $x=\text{л}, y=\text{и}, z=\text{л}$, во всех других случаях она будет ложной, т. е. она как раз представляет рассматриваемую нами функцию.

Подобным образом представляется и любая другая функция, принимающая значение *и* только один раз. Например, если $g(x, y, z)$ истинна только для набора *и, л, л*, то она представляется конъюнкцией $(x \wedge \neg y \wedge \neg z)$ и т. д.

Можно это правило сформулировать так: *Если функция принимает значение и в точности для одного набора переменных, то она может быть представлена конъюнкцией переменных и их отрицаний.* При этом, если в наборе,

соответствующем значению u для функции, некоторая переменная имеет значение u , то в конъюнкцию входит сама переменная, если же переменная имеет значение l , то в конъюнкции участвует соответствующая переменная со знаком \neg .

Перейдем теперь к рассмотрению произвольной функции. Например,

x	y	z	$f(x, y, z)$
u	u	u	l
u	u	l	l
u	l	u	u
u	l	l	l
l	u	u	u
l	u	l	l
l	l	u	l
l	l	l	u

Выделим все наборы переменных, для которых функция принимает значение u . В нашем случае это будут следующие три набора:

$$x=u, \quad y=l, \quad z=u; \quad x=l, \quad y=u, \quad z=u;$$

$$x=l, \quad y=l, \quad z=l.$$

Каждому из этих наборов мы вышеуказанным образом ставим в соответствие конъюнкцию переменных и их отрицаний: $(x \wedge \neg y \wedge z)$; $(\neg x \wedge y \wedge z)$; $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$. Мы утверждаем, что рассматриваемая функция представляется дизъюнкцией этих конъюнкций:

$$((x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)).$$

Действительно, указанная формула принимает значение u тогда и только тогда, когда значение u принимает хотя бы одна из конъюнкций, объединенных знаком \vee . Но мы

уже видели выше, что каждая из этих конъюнкций принимает значение u в точности для одного набора: (u, l, u) ; (l, u, u) ; (l, l, l) , а это как раз те наборы, для которых рассматриваемая функция принимает значение u . Таким образом, наше утверждение доказано. Тем самым установлена процедура, позволяющая для всякой булевой функции написать соответствующую ей формулу.

Итак, окончательно, всякая формула логики высказываний представляет некоторую булеву функцию и, наоборот, всякая булева функция может быть представлена некоторой формулой. Но различные формулы могут представлять одну и ту же булеву функцию; они называются тогда равносильными. Возникают следующие вопросы, важные как в теории, так и в практике применений логики высказываний: обозреть совокупность всех формул, представляющих некоторую булеву функцию. Частично мы этот вопрос уже решили, указав, как с помощью некоторой последовательности преобразований всякая формула может быть приведена к некоторой равносильной ей формуле стандартного вида — дизъюнктивной нормальной форме. Тем не менее этим проблема не вполне исчерпывается, и в следующей главе мы вернемся к ней и рассмотрим ее с несколько иной точки зрения. Кроме того, оказывается, что существует, вообще говоря, много дизъюнктивных форм, равносильных между собой. В применениях очень важно бывает выбрать среди них одну, по возможности более простую, содержащую как можно меньше букв. Этой задаче посвящается сейчас много работ, и нужно сказать, что окончательное решение еще не найдено.

§ 5. Применения алгебры логики в теории релейно-контактных схем и в теории автоматов

Как уже отмечалось во введении, главными причинами все возрастающего значения математической логики послужили происходящее у нас на глазах развитие автоматике, потребности теории и практики вычислительных машин и управляющих устройств. Человек издавна стремился к тому, чтобы создавать приборы, которые были бы способны в той или иной мере осуществлять

вместо него какую-то долю его умственной деятельности. Однако для этой цели в первую очередь требовалась строгая и четкая формулировка объектов, явлений и законов этой деятельности. Оказалось, что для этой цели с успехом может быть использован аппарат математической логики, в частности алгебра Буля. И это не удивительно. Ведь математическая логика изучает механизм логических заключений. А именно они и должны осуществляться автоматическими устройствами. Только после того, как сама задача, которую должен решать автомат, сформулирована и расчленена методами логики на элементарные действия, можно переходить к собственно технической задаче, состоящей уже в построении и налаживании некоторого устройства, способного выполнять предусмотренное действие.

Идея использования алгебры Буля для построения автоматических устройств, основанных на релейно-контактных схемах, была высказана уже в 1910 г. крупным физиком П. Эренфестом. Но эта ценная мысль долгое время не привлекала к себе должного внимания. Дело в том, что для конструирования простейших схем — а другие тогда и не выполнялись — инженеры вполне обходились своим повседневным опытом и не нуждались в общей теории и математическом аппарате. Положение существенно изменилось в 30-х годах нашего столетия. К этому времени автоматические устройства достигли такого уровня сложности, что создание общих теорий для их конструирования стало насущной необходимостью. И вот в различных странах и в большой мере независимо друг от друга ученые приходят к мысли использовать для этой цели элементы алгебры логики. Здесь нужно особенно отметить советского физика В. И. Шестакова [26], американского математика К. Шеннона [27] и японского инженера А. Накасима [17]. С тех пор область применения математической логики в теории и практике автоматических устройств непрерывно расширяется. В нее включаются и более высокие разделы математической логики — исчисление предикатов, теория алгоритмов и др. Эта тенденция особенно усилилась в эпоху создания вычислительных машин и возникновения кибернетики. На сегодняшний день существует уже большой новый раздел науки, который можно было бы назвать «прикладная математическая логика».

Мы ознакомимся только с простейшими, относящимися сюда вопросами и отсылаем читателя, желающего ознакомиться более детально с этой областью, к обширной литературе.

Рассмотрим самое общее автоматическое устройство — абстрактный автомат. Его можно кратко описать следующим образом.

Автомат предназначен участвовать в некотором процессе. В него поступают сигналы — информация о ситуациях, существующих в данный момент. В зависимости от поступивших сигналов автомат должен выполнять то или иное предусмотренное действие. Принято условно говорить, что сигналы поступают на «вход» автомата, а действия осуществляются на «выходе».

Под это очень общее определение подпадают все известные конкретные автоматы, как самые простые, так и самые сложные. В широко распространенных теперь торговых автоматах действие на выходе, состоящее в открывании люка и выдаче товара, должно происходить тогда и только тогда, когда в управляющее устройство автомата поступает сигнал о том, что в кассу автомата поступил предусмотренный набор монет. Автоматический стрелочник на железной дороге должен открыть некоторый предусмотренный путь поезду A , если поступили сигналы о том, что поезд A приблизился к стрелке, и сигнал о том, что определенный отрезок пути за стрелкой свободен от поездов, и т. д. Читатель без труда пояснит себе этот принцип на дальнейших примерах известных ему автоматических устройств.

Следует отметить, что, вообще говоря, желаемое действие автомата может зависеть как от сигналов, поступающих в данный момент, так и от сигналов, поступивших раньше.

В самой общей форме абстрактный автомат должен решать следующую задачу. Некоторые действия на выходе автомата в некоторый момент времени t должны быть функцией от сигналов, поступивших на вход автомата за все время до этого момента. Как можно более точно сформулировать эту требуемую зависимость между поступающими сигналами и надлежащими действиями?

Оказалось, что алгебра логики дает подходящий аппарат для детального анализа этой общей задачи. При этом выяснилось исключительно важное обстоятельство: *прин-*

ципы построения искомого автомата не зависят от его конкретного практического назначения. Идет ли речь об автопилоте, управляющем самолетом, об автомате, управляющем станком, об автоматическом регулировании уличного движения и т. п. — все эти и всевозможные другие устройства, как уже существующие, так и те, которые будут созданы, являются различными техническими воплощениями общих «абстрактных» автоматов, принципы которых изучаются математическими методами в новой науке — кибернетике. Специально этой задачей занимается совсем недавно образовавшийся раздел кибернетики — теория абстрактных автоматов [1]. В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми основными понятиями этой теории и несколько более подробно рассмотрим принципы простейших автоматов, реализуемых с помощью релейно-контактных и электронно-импульсных схем.

Как всегда, когда встает вопрос о построении строгой теории с применением математического аппарата для решения какой-либо общей задачи, возникающей в науке или в практике, первое, что необходимо сделать, — это упростить рассматриваемую задачу, выделяя в ней все существенное и временно отвлекаясь от побочных обстоятельств, усложняющих и затемняющих самую суть постановки задачи. Упрощать задачу нужно так, чтобы, будучи упрощенной, она достаточно полно отражала все принципиальные стороны исходной задачи, и так, чтобы существовал разумный метод, позволяющий самую общую задачу сводить к упрощенной. В связи с этим мы примем ряд упрощений:

1. Мы будем считать, что действие автомата должно состоять в исполнении одного акта с двумя возможными исходами.

Например, устройство должно включать или выключать лампочку, включать или выключать мотор, открыть или закрыть семафор и т. п. Вкратце, действие должно заключаться в замыкании или размыкании некоторого электрического контакта. Для определенности будем считать, что в результате этого вспыхнет или погаснет лампочка. Нетрудно себе представить, как более сложное действие может быть в принципе сведено к так упрощенному. Действительно, сколь угодно сложная операция на выходе автомата может быть осуществлена одновременным действием большого числа исполнительных

устройств. Для включения и выключения каждого из них может быть предусмотрен отдельный автомат.

Второе упрощение относится к сигналам, поступающим на вход автомата:

2. Мы предположим, что в каждый момент времени на вход автомата поступает некоторое конечное число n сигналов, каждый из которых может принимать одно из двух значений.

Смысл сигналов может быть самым различным и зависит уже от конкретного назначения автомата. Например,

а) в автомате, осуществляющем управление сталелитейным процессом, значение некоторого сигнала на входе может быть

«Температура в печи выше 1100° » или «Температура в печи ниже 1100° »;

б) для автоматического стрелочника значение одного из сигналов может быть

«Поезд А прошел семафор» или «Поезд А не прошел семафор» и т. д.

Для определенности мы представим себе это условие так. Вход автомата состоит из n кнопок, каждая из которых может быть нажата или отпущена. (Состояния «нажата» и «отпущена» отвечают двум значениям одного из поступающих сигналов.) Занумеруем кнопки числами 1, 2, 3, . . . Тогда вход нашего автомата будет представлять собой совокупность кнопок K_1, K_2, \dots, K_n . Каждый сигнал состоит в том, что в данный момент времени определенная кнопка оказывается нажатой или отпущенной. Обозначая эти значения сокращенно буквами H и O , можно всю совокупность возможных сигналов, поступающих в некоторый момент времени t , представить так:

$K_1—H$ или O ,

$K_2—H$ или O ,

.

$K_n—H$ или O .

Мы предполагаем также, что состояние каждой кнопки не зависит от состояния всех других кнопок. Тогда в каждый момент времени состояние входа автомата может быть охарактеризовано какой-нибудь из 2^n последовательностей

букв H и O длины n . Например ($n=5$),

$$\begin{array}{ccccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5, \\ H & O & H & H & O. \end{array}$$

Нетрудно себе представить, как более сложные сигналы могут быть сведены к рассматриваемому типу, если только выбрать число кнопок достаточно большим. Действительно, обыкновенно автомат должен реагировать определенным образом на значения числовых параметров, определяющих состояние, регулируемое автоматом (например, величины давления, температуры, электрического напряжения и др.). Соответствующие величины могут быть даны как числа, записанные с определенным числом знаков в двоичной системе счисления. Каждому разряду соответствующего двоичного числа можно тогда сопоставить одну кнопку, условившись, что она будет нажата, если цифра данного разряда равна 1, и отпущена, если она равна 0.

При введенных выше двух упрощениях условие для искомого абстрактного автомата может быть теперь четко сформулировано так.

Возможное действие на выходе в момент времени t (лампочка горит или погашена) должно быть функцией от состояний совокупности всех кнопок K_1, K_2, \dots, K_n для всех моментов времени, предшествующих t .

Если требуемое действие в момент t обозначить через $z(t)$ ($z(t)$ принимает в момент времени t одно из двух значений: «лампочка горит», что мы будем обозначать сокращенно буквой Γ , и «лампочка погашена» — сокращенно Π), а состояние кнопок в момент времени t через $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ($x_i(t)$ принимает в каждый момент времени t одно из значений H или O), то задача состоит в создании автомата, удовлетворяющего условию вида

$$z(t) = F(x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t')), \quad (1)$$

где $x_i(t')$ указывает состояние кнопки K_i во все моменты времени t' , предшествующие данному моменту t .

Наше последнее упрощение касается времени поступления сигналов. Мы будем считать, что

3. Сигналы поступают не непрерывно, а в некоторые дискретные моменты времени, обозначаемые целыми числами $0, 1, 2, \dots$. Это означает, что автомат начинает работать

в некоторый момент $t' = 0$ и сигналы в него поступают, скажем, через каждую секунду: $t' = 0$ — начальный момент, $t' = 1$ — через одну секунду, $t' = 2$ — через две секунды и т. д. до настоящего момента, который является t -й секундой ($t' = t$) после начала работы автомата. Тогда вышеприведенное условие (1) более подробно выписывается так:

$$z(t) = F(x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(t); x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(t); \dots; x_n(0), x_n(1), \dots, x_n(t)). \quad (2)$$

Первым этапом в решении задачи на создание необходимого автомата является развернутое описание функций в правой части равенства (2). Оно состоит в формулировке тех логических условий, при которых лампочка должна гореть и при которых она должна быть погашена. Именно, эти логические условия формулируются на языке булевых функций с применением булевых операций и формул. По этим формулам уже нетрудно из некоторых элементарных узлов — реле или диодов и триодов — составить схему, выполняющую желаемое автоматическое действие.

Рассмотрим детально в качестве примера частный, но очень важный случай, когда действие автомата на выходе зависит от сигналов, поступающих на вход в данный момент (а не во все предыдущие). Такие автоматы называются одноктактными, или автоматами без памяти. (Автомат как бы забывает все сигналы, поступившие раньше, и реагирует только на те, которые поступили в настоящий момент.) В этом частном случае условие (2) для действия автомата упрощается и принимает вид

$$z(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad (3)$$

а так как в правой части фигурируют значения x_i только для данного момента t , то равенство можно проще записать, положив $x_i(t) = x_i$, так что

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4)$$

Здесь мы имеем уже известную нам булеву функцию от n булевых переменных. Как мы уже знаем, ее можно задать или таблично, или различными булевыми формулами.

Пусть, например, вход автомата имеет три кнопки, и мы хотим, чтобы лампочка горела при следующих четырех

из восьми возможных сочетаний:

$$K_1 \quad H \quad H \quad H \quad O,$$

$$K_2 \quad H \quad H \quad O \quad O,$$

$$K_3 \quad H \quad O \quad H \quad H.$$

Во всех остальных случаях лампочка должна быть погашена.

Пользуясь булевой алгеброй, а именно методом приведения таблично заданной булевой функции к дизъюнктивной нормальной форме, условие горения лампочки может быть представлено следующей формулой:

$$z = (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \quad (5)$$

или в обозначениях, употребляемых в электротехнике,

$$z = x_1 x_2 + \bar{x}_2 x_3. \quad (6)$$

Здесь x_1 , x_2 , x_3 означают:

x_1 — кнопка K_1 нажата,

x_2 — кнопка K_2 нажата,

x_3 — кнопка K_3 нажата,

и, конечно, \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 означают, что соответствующие кнопки отпущены. Формула (5) или (6) еще столь проста, что условие, которое она определяет, может легко быть выражено и словесно:

Лампочка горит тогда и только тогда, когда истинно высказывание:

«(Кнопка K_1 нажата и кнопка K_2 нажата)

или

(кнопка K_2 отпущена и кнопка K_3 нажата)».

Конечно, если число кнопок велико и булева функция сложна, то обычное словесное выражение условия действия автомата будет мало обозримо, но формулу логики высказываний — по меньшей мере одну — мы всегда сможем построить по таблице методом, указанным в предыдущем параграфе. Очень существенно, что формулы логики высказываний записаны исключительно с помощью знаков операций \neg (отрицание), \wedge (конъюнкция) и \vee (дизъюнкция) (соответственно в электротехнике —, \cdot , $+$). Эти операции в свою очередь можно осуществить надлежащим расположением электрических замыкающих и размыкающих

контактов или же, что более совершенно, с помощью электронных диодов и триодов.

Покажем, как это делается с помощью контактов.

Рассмотрим простейший случай. Имеется только одна кнопка, и автомат должен осуществлять следующее условие: *лампочка горит тогда и только тогда, когда кнопка*

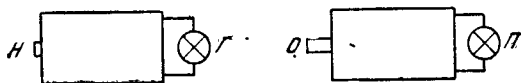


Рис. 1.

нажата (рис. 1). Если обозначить высказывание «кнопка нажата» через x , то логическое условие примет наипростейший вид

$$z = x.$$

Эта задача осуществляется с помощью «замыкающего контакта» (рис. 2). Из рисунка легко убедиться, что при нажатии кнопки контакт замыкается и лампочка горит.

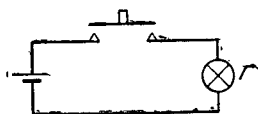


Рис. 2.

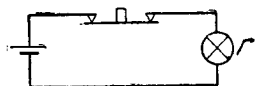


Рис. 3.

Противоположную задачу «лампочка горит тогда и только тогда, когда кнопка отпущена», осуществляет размыкающий контакт (рис. 3). Если кнопка нажата, то контакт разомкнут и лампочка погашена; если отпустить кнопку, то пружина замыкает контакт и лампочка горит. Размыкающий контакт осуществляет операцию отрицания

$$z = \bar{x}.$$

В дальнейшем мы будем замыкающий контакт на схемах отмечать так:

_____ x _____

а размыкающий так:

_____ \bar{x} _____

Для построения схем, реализующих любые формулы логики высказываний, нужно теперь еще указать, как осуществлять операции дизъюнкции и конъюнкции. Конъюнкция реализуется последовательным включением контактов (замыкающих или размыкающих), дизъюнкция — параллельным включением. Из схем (рис. 4, 5) непосредственно усматривается, что первая срабатывает тогда и

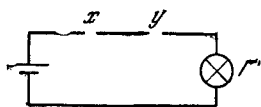


Рис. 4.

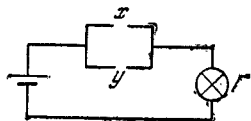


Рис. 5.

только тогда, когда выполняется верная формула $x \cdot y$, вторая, если верна формула $x + y$.

Вышерассмотренная функция $z = x_1 x_2 + \bar{x}_2 x_3$, как легко видеть, реализуется следующей схемой (рис. 6). Более общо, всякая дизъюнктивная нормальная формула осуществляется схемой, в которой контакты, соответствующие

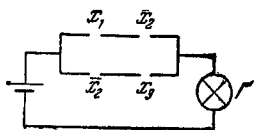


Рис. 6.

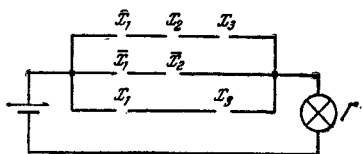


Рис. 7.

членам конъюнкции, включаются последовательно, а все дизъюнктивные члены в свою очередь помещаются параллельно. Например, формула

$$z = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_3$$

реализуется схемой (рис. 7). Здесь следует отметить, что, как непосредственно видно, некоторое элементарное условие-высказывание (соответствующее в нашем рассмотрении нажатию кнопки K_i) встречается, вообще говоря, в формуле и в соответствующей схеме несколько раз. Управление всеми контактами, как замыкающими, так и размыкающими, помеченными одной и той же буквой x_i ,

происходит с помощью электромагнитных реле, которые при нажатии кнопки K_i замыкают все замыкающие и размыкают все размыкающие контакты, отвечающие букве x_i .

Сразу же видно, что число контактов в схеме равно числу букв в соответствующей формуле. Но представление булевых функций формулами не однозначно. Скажем, формулы

$$а) (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \quad \text{и} \quad б) x_1 \wedge (x_2 \vee (x_3 \wedge x_4))$$

представляют, как легко проверить, ту же самую функцию. Им будут соответствовать две различные схемы (рис. 8).

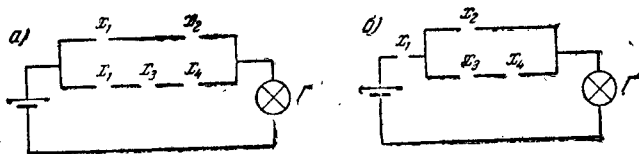


Рис. 8.

В предшествующих параграфах мы показали, как любую булеву функцию можно представить в виде формулы, содержащей только знаки отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Это утверждение равносильно тому, что любой одноконтный автомат можно построить с помощью последовательного и параллельного соединений замыкающих и размыкающих контактов.

Кнопка, замыкающая (или размыкающая) один или несколько контактов при нажатии, является простейшим коммутационным (соединительным) прибором. Для создания автомата с принципиальной точки зрения не существенно, каким именно способом будет осуществляться замыкание или размыкание электрической цепи. В современной автоматике для этих целей применяются самые различные устройства: электромагнитные реле, электронные лампы, полупроводниковые устройства и др.

Независимо от конкретного технического выполнения того или иного автомата, алгебра логики позволяет определить его структуру, его логическую схему. Как мы видели на простых примерах одноконтных автоматов, логическая схема соответствует представлению булевой функции некоторой формулой логики высказываний. Различ-

ным формулам, представляющим одну и ту же булеву функцию, соответствуют различные схемы автоматов, выполняющих одинаковые действия. Тем самым возникает важная задача: среди равносильных формул найти возможно более простые, содержащие возможно меньшее число букв. Это — трудная задача алгебры логики, называемая задачей минимизации, которая до сих пор в общем случае не получила еще окончательного удовлетворительного решения. Существенные успехи в направлении ее решения достигли советские ученые Ю. И. Журавлев, О. Б. Лупанов, С. В. Яблонский и др.

Мы затронули в нашем изложении только простейшие автоматические устройства — одноктактные. Между тем особый интерес представляют сейчас устройства многотактные, или устройства «с памятью», у которых действие на выходе зависит от поступивших сигналов в некоторый прошедший промежуток времени. Исследование таких устройств намного сложнее. В настоящее время здесь возник новый раздел математики, тесно связанный с математической логикой, который называется «абстрактной теорией автоматов», с которым можно познакомиться по уже довольно обширной литературе.

ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Значение тождественно истинных формул для логики высказываний

В предыдущей главе мы ввели важное понятие равносильности формул логики высказываний. Две формулы A и B равносильны ($A \equiv B$) тогда и только тогда, когда они представляют одну и ту же булеву функцию от входящих в них переменных. Там же мы обсудили задачу, как установить, равносильны ли две данные формулы или нет.

Вообще говоря, само определение показывает, как в любых случаях конечным числом операций можно установить равносильность или неравносильность двух формул A и B . Для этого нужно вычислить значения истинности формул для всевозможных значений истинности переменных и сравнивать их. Если для всех значений переменных значения истинности формул A и B совпадают друг с другом, то формулы равносильны, в противном случае — нет. Таким образом, на первый взгляд может показаться, что проблема уже решена и притом самым простым образом и что все дальнейшие исследования в этом направлении излишни.

Приведем два соображения, показывающие, что это первое впечатление обманчиво.

Одно соображение мы уже вскользь упоминали. Если число переменных не очень мало, то число наборов, которые нужно подставлять, будет очень велико и применение простого принципа сравнения значений формул A и B

может стать практически невыполнимым. Ведь, как мы уже говорили, уже для 30 переменных нужно испробовать более 10^9 наборов. Для установления равносильности нужно еще для всякого набора провести вычисление значений обеих формул, а если эти формулы достаточно большой длины, то на это в свою очередь понадобится большое число операций. Наличие общих критериев равносильности зачастую позволяет убедиться в равносильности или неравносильности формул, не прибегая к подобным вычислениям всех значений формул.

Во-вторых — и это соображение, по-видимому, более важно — в логике высказываний, в ее применениях и в логике предикатов, о которой будет идти речь в гл. III, в большинстве случаев интересуются не равносильностью двух каких-либо формул, а равносильностью бесконечного множества пар формул. Нужны утверждения, согласно которым все формулы некоторого определенного вида равносильны соответственно формулам некоторого определенного другого вида. Если классы формул рассматриваемых видов содержат бесконечно много формул, то, очевидно, подобные утверждения не могут быть установлены даже сколь угодно громоздким подсчетом, а требуют применения общих соображений. К таким общим соображениям относятся, например, рассуждения в предыдущей главе, позволившие нам установить равносильность любой формулы формуле в дизъюнктивной нормальной форме.

На протяжении этого параграфа мы наряду с задачей о равносильности формул встретимся с другими сходными задачами. Относительно них можно сделать те же замечания: коль скоро речь идет о конечном числе формул, то все рассматриваемые свойства и отношения могут в принципе быть проверены прямым подсчетом. В пользу приводимого общего рассмотрения можно всякий раз повторить соображения, подобные тем, которые мы привели для случая задачи равносильности.

Покажем, что равносильность двух формул легко сводится к тождественной истинности некоторой формулы. Действительно, имеет место следующее, легко доказываемое предложение.

Пусть A и B — две формулы логики высказываний (всегда можно считать, что эти формулы зависят от одних и тех же переменных x_1, x_2, \dots, x_n). Формулы A и B

равносильны: $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда формула $A \sim B$ тождественно истинна.

Действительно, если $A(x_1, \dots, x_n) \equiv B(x_1, \dots, x_n)$, то, какие бы мы значения истинности a_1, a_2, \dots, a_n ни подставляли вместо переменных x_1, x_2, \dots, x_n , или $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(a_1, \dots, a_n)$ обе будут иметь значение u или же обе будут иметь значение l . И в том, и в другом случае высказывание $A(a_1, \dots, a_n) \sim B(a_1, \dots, a_n)$ будет истинно. Следовательно, формула $A(x_1, \dots, x_n) \sim B(x_1, \dots, x_n)$ будет истинна для всех значений своих переменных, т. е. будет тождественно истинной формулой.

Наоборот, если $A \not\equiv B$, то для некоторого набора a_1, \dots, a_n значений истинности одно высказывание будет иметь значение u , другое l . Тогда $A(a_1, \dots, a_n) \sim B(a_1, \dots, a_n)$ будет ложным высказыванием, а следовательно, формула $A(x_1, \dots, x_n) \sim B(x_1, \dots, x_n)$ не будет тождественно истинной.

Тем самым задача об установлении равносильности двух формул сводится к установлению тождественной истинности формул некоторого частного вида.

Наряду с отношением равносильности между формулами логики высказываний рассматриваются некоторые другие отношения, представляющие большой интерес для логики и ее применений. Среди них наиважнейшим является отношение логического следования. Мы остановимся сейчас несколько более подробно на этом отношении, покажем сводимость этого понятия к тождественной истинности формул некоторого частного вида и обсудим значение этого отношения.

Пусть $A(x_1, \dots, x_n) = A$ и $B(x_1, \dots, x_n) = B$ — две формулы логики высказываний от переменных x_1, \dots, x_n . Мы будем говорить, что формула $B(x_1, \dots, x_n)$ является логическим следствием формулы $A(x_1, \dots, x_n)$, если B принимает значение u для всех наборов значений истинности, для которых A истинна. Это означает также, что если представить обе формулы их таблицами истинности, то множество наборов, для которых A истинна, содержится в множестве наборов, для которых истинна формула B .

Например, согласно этому определению формула $B = (x \vee z)$ является логическим следствием формулы $A = ((x \vee y) \wedge z)$. Это видно из соответствующих таблиц истинности:

x	y	z	$((x \vee y) \wedge z)$	$(x \vee z)$
$и$	$и$	$и$	$и$	$и$
$и$	$и$	$л$	$л$	$и$
$и$	$л$	$и$	$и$	$и$
$и$	$л$	$л$	$л$	$и$
$л$	$и$	$и$	$и$	$и$
$л$	$и$	$л$	$л$	$л$
$л$	$л$	$и$	$л$	$и$
$л$	$л$	$л$	$л$	$л$

Из сказанного видно, что две формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой. Из определения также явствует, что всякая формула является логическим следствием тождественно ложной формулы. Действительно, так как в этом случае формула A никогда не принимает значения $и$, то множество наборов, для которых A истинна, пусто и содержится, следовательно, в множестве наборов истинности для любой формулы B . Также очевидно, что тождественно истинная формула является логическим следствием любой формулы.

Введенное понятие следующим образом сводится к понятию тождественной истинности некоторой формулы:

Формула $B = B(x_1, \dots, x_n)$ является логическим следствием формулы $A = A(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда тождественно истинна формула

$$A(x_1, \dots, x_n) \rightarrow B(x_1, \dots, x_n).$$

Действительно, пусть $B(x_1, \dots, x_n)$ является логическим следствием формулы $A(x_1, \dots, x_n)$. Если для какого-нибудь набора a_1, \dots, a_n значений истинности $A(a_1, \dots, a_n)$ имеет значение $и$, то и $B(a_1, \dots, a_n)$ имеет значение $и$; следовательно, для a_1, \dots, a_n имеем, что $A(a_1, \dots, a_n) \rightarrow B(a_1, \dots, a_n)$ истинна. Если же $A(a_1, \dots, a_n)$ имеет значение $л$, то, каково бы ни было значение истинности $B(a_1, \dots, a_n)$, согласно определению импликации также получаем, что $A(a_1, \dots, a_n) \rightarrow B(a_1, \dots, a_n)$ истинна. Значит, в этом случае $A(x_1, \dots, x_n) \rightarrow B(x_1, \dots, x_n)$ всегда истинна, т. е. это тождественно истинная формула.

Предположим наоборот, что $B(x_1, \dots, x_n)$ не является логическим следствием формулы $A(x_1, \dots, x_n)$. Это означает, что для некоторого набора a_1, \dots, a_n формула $A(a_1, \dots, a_n)$ будет истинна, а $B(a_1, \dots, a_n)$ ложна. Но тогда для этого набора $A(a_1, \dots, a_n) \rightarrow B(a_1, \dots, a_n)$ будет ложной, и значит, формула $A \rightarrow B$ не тождественно истинна.

Если принять во внимание то существенное огрубление логических понятий, которое имеет место в логике высказываний, то следует признать, что приведенное определение достаточно точно отражает то интуитивное понятие логического следования, которым мы пользуемся при дедуктивных заключениях в точных науках и, в особенности, в математике. Отметим, что введенное нами отношение относится не к единичным высказываниям, как это имело место для понятия импликации, а к целым множествам высказываний определенной формы, описываемых формулами $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(x_1, \dots, x_n)$. Формулу $A(x_1, \dots, x_n)$ можно рассматривать как *условие*, которое может быть выполнено или нет в зависимости от истинности или ложности формулы A . Отношение логического следования выражает тот факт, что всегда, когда выполнено условие, описываемое формулой $A(x_1, \dots, x_n)$, имеет место ситуация, описываемая формулой $B(x_1, \dots, x_n)$. Мы считаем, что $B(x_1, \dots, x_n)$ является логическим следствием $A(x_1, \dots, x_n)$ потому, что знание об истинности A позволяет нам утверждать истинность B во всех случаях и без знания какой-либо дополнительной информации. Если, наоборот, $A(a_1, \dots, a_n)$ ложна, то $B(a_1, \dots, a_n)$ при этом может быть и истинной, и ложной, что не нарушает известную нам тождественную истинность

$$A(x_1, \dots, x_n) \rightarrow B(x_1, \dots, x_n).$$

В этом случае без дальнейшей информации мы не можем утверждать истинность высказывания $B(a_1, \dots, a_n)$. Как мы видим, эта ситуация вполне соответствует нашему повседневному пониманию логического заключения.

Любая тождественно истинная формула теории высказываний вида

$$A(x_1, \dots, x_n) \rightarrow B(x_1, \dots, x_n)$$

соответствует некоторой общей схеме логического заключения. Для того чтобы уяснить это себе, рассмотрим пример одной схемы логического заключения, часто приме-

няемой в математических доказательствах, а именно, установление истинности некоторого утверждения путем приведения противоположного утверждения к абсурду. Схема этого заключения выглядит так. Предположим, что нужно доказать истинность некоторого утверждения A . Предполагается, что истинно утверждение $\neg A$. После этого показывается, что тогда имеется некоторое такое утверждение B , что истинными являются оба утверждения $\neg A \rightarrow B$ и $\neg A \rightarrow \neg B$. Это и есть то, что называется абсурдом. Как доказывается истинность этих двух импликаций, нас в настоящее время не интересует¹⁾. Мы предполагаем, что они уже доказаны. Тогда мы утверждаем, что истинно высказывание A . Спрашивается, на основании какого логического закона делаем мы это заключение. Оказывается, что это заключение основано на тождественно истинной формуле

$$[(\neg x \rightarrow y) \wedge (\neg x \rightarrow \neg y)] \rightarrow x \quad (*)$$

логики высказываний. (Читатель легко проверит, что $(*)$ — тождественно истинная формула.) Формула $(*)$ имеет вид $A(x, y) \rightarrow B(x, y)$. Формула x является логическим следствием формулы $(\neg x \rightarrow y) \wedge (\neg x \rightarrow \neg y)$. Если нам уже известно, что $(\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$ истинна, то мы отсюда заключаем, что истинно утверждение A . Это и есть схема заключения приведением противоположного утверждения к абсурду.

В следующем параграфе мы дадим обзор логических тождеств, лежащих в основе важнейших обычных схем логических заключений. Теперь же мы приведем другие возможные логические отношения между формулами $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(x_1, \dots, x_n)$ логики высказываний, содержащими переменные высказывания x_1, \dots, x_n , отношения, основанные на тождественно истинных формулах и позволяющие делать логические заключения.

1. Как мы уже видели, если

$$A(x_1, \dots, x_n) \rightarrow B(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

— тождественно истинная формула, то всякий раз,

¹⁾ Это зависит уже от строения самих высказываний A и B и устанавливается на основании законов и правил, относящихся к той математической теории, к которой относятся данные высказывания. Для формального описания этих законов недостаточно логики высказываний. Мы несколько более подробно остановимся на относящихся сюда соображениях, когда мы познакомимся с логикой предикатов.

когда $A(a_1, \dots, a_n)$ истинна, $B(a_1, \dots, a_n)$ также истинна. (Если $A(a_1, \dots, a_n)$ ложна, то относительно $B(a_1, \dots, a_n)$ на основании (1) ничего утверждать нельзя.)

2. Если

$$A(x_1, \dots, x_n) \vee B(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

— тождественно истинная формула, то всякий раз, когда $A(a_1, \dots, a_n)$ ложна, формула $B(a_1, \dots, a_n)$ истинна. (Если $A(a_1, \dots, a_n)$ истинна, то относительно $B(a_1, \dots, a_n)$ ничего утверждать нельзя.)

3. Если

$$A(x_1, \dots, x_n) \vee \neg B(x_1, \dots, x_n)$$

тождественно истинна, то из ложности $A(a_1, \dots, a_n)$ вытекает ложность $B(a_1, \dots, a_n)$. (Если $A(a_1, \dots, a_n)$ истинна, то относительно $B(a_1, \dots, a_n)$ ничего утверждать нельзя.)

4. Если

$$A(x_1, \dots, x_n) \mid B(x_1, \dots, x_n)$$

— тождественно истинная формула, то коль скоро истинно высказывание $A(a_1, \dots, a_n)$, то $B(a_1, \dots, a_n)$ ложно. (Если $A(a_1, \dots, a_n)$ ложно, то о $B(a_1, \dots, a_n)$ ничего утверждать нельзя.)

5. Если, как нам уже известно,

$$A(x_1, \dots, x_n) \sim B(x_1, \dots, x_n)$$

— тождественно истинная формула, то всякий раз, когда сложное высказывание $A(a_1, \dots, a_n)$ истинно, то $B(a_1, \dots, a_n)$ истинно, а когда $A(a_1, \dots, a_n)$ ложно, то и $B(a_1, \dots, a_n)$ ложно.

6. Наконец, если

$$\neg(A(x_1, \dots, x_n) \sim B(x_1, \dots, x_n))$$

— тождественно истинная формула, то из истинности $A(a_1, \dots, a_n)$ следует ложность $B(a_1, \dots, a_n)$, а из ложности $A(a_1, \dots, a_n)$ следует истинность $B(a_1, \dots, a_n)$.

Мы не будем доказывать приведенные утверждения; они устанавливаются простыми рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые мы проводили выше, доказывая утверждения 1 и 5.

Из сказанного видно, какую большую роль играют тождественно истинные формулы логики высказываний. Ознакомимся теперь детальнее с некоторыми из них.

§ 2. Примеры тождественно истинных формул логики высказываний

В настоящем параграфе мы рассмотрим ряд тождественно истинных формул логики высказываний. В предыдущем параграфе мы установили, что тождественно истинные формулы лежат в основе логических заключений; для некоторых из приводимых нами тождественно истинных формул мы обсудим соответствующий тип заключений. Существует бесконечно много тождественно истинных формул, и выбор тех или иных примеров всегда будет в некоторой мере случайным. В нашем случае мы старались выбрать те, которые особенно часто используются в практике математических доказательств. Вновь отметим, что логика высказываний является слишком бедной теорией для описания логического аппарата математических заключений. Тем самым и типы логических заключений, основанных на тождественно истинных формулах логики высказываний, далеко не исчерпывают логических законов, используемых математикой, не говоря уже о логических заключениях в других науках.

Тот факт, что приводимые ниже формулы являются тождественно истинными, легко усматривается на основании таблиц истинности, определяющих логические операции.

Укажем сначала три «классические» тождественно истинные формулы.

1. Закон тождества:

$$x \rightarrow x$$

«Всякое высказывание является логическим следствием самого себя».

2. Закон противоречия:

$$\neg(x \wedge \neg x).$$

Этот логический закон лежит в основе следующего утверждения: «Для всякого высказывания a неверно, что истинно и высказывание a , и его отрицание».

Закон противоречия естественно также сформулировать как утверждение, согласно которому формула

$$x \wedge \neg x$$

тождественно ложна.

3. Закон исключенного третьего:

$$x \vee \neg x.$$

Этот закон утверждает, что «для каждого высказывания x или само высказывание, или его отрицание истинно».

Наряду с указанными тремя законами нужно отметить также:

4. Закон двойного отрицания

$$\neg \neg x \sim x,$$

согласно которому отрицание от отрицания любого высказывания равносильно самому высказыванию.

5. Добавление антецедента *verum ex quolibet* (истина из чего угодно)

$$x \rightarrow (y \rightarrow x).$$

Если A — истинное высказывание, то для любого высказывания B импликация $B \rightarrow A$ будет истинным высказыванием.

6. *Ex falso quodlibet* (из ложного что угодно)

$$(\neg x \rightarrow (x \rightarrow y)).$$

Если B — ложное высказывание, а тем самым $\neg B$ истинно, то B имплицирует любое высказывание.

7. *Modus ponens*

$$(x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y$$

лежит в основе одного из самых важных типов логического заключения. Если истинно, что некоторое высказывание A имплицирует высказывание B и, кроме того, высказывание A истинно, то согласно закону *modus ponens* можно заключить, что истинно B . Этот тип заключения повсеместно употребляется при математических доказательствах.

Проанализируем применения этого закона на примере простого заключения в элементарной арифметике:

«Все простые числа, большие 2, нечетны»,

«7 есть простое число, большее 2».

Следовательно, «7 есть нечетное число».

На основании каких логических законов делается это заключение? Здесь применяются два закона. Первый закон,

закон заключения от общего к частному, относится не к логике высказываний, а к логике предикатов, с которой мы познакомимся в следующей главе. На основании этого закона преобразуется первая посылка заключения. Для этого перепишем сперва эту посылку в удобной для нашей цели форме:

«Для всех x , если x — простое число, большее 2, то x нечетно». Согласно заключению от общего к частному, всякое высказывание

«Если q — простое число, большее 2, то q нечетно» истинно. Например,

«Если 1 — простое число, большее 2, то 1 нечетно»,

«Если 2 — простое число, большее 2, то 2 нечетно»,

«Если 3 — простое число, большее 2, то 3 нечетно»

и т. д. являются истинными высказываниями. В частности, имеем

«Если 7 — простое число, большее 2, то 7 нечетно» — истинное высказывание.

Кроме того, по предположению, высказывание

«7 — простое число, большее 2»

истинно.

Положим

A — «7 — простое число, большее 2»,

B — «7 нечетно».

Тогда имеем

$A \rightarrow B$ истинно

и

A истинно.

Теперь применяется *modus ponens*; следовательно, B истинно, т. е. высказывание «7 нечетно» истинно.

8. Двойственным к *modus ponens* является закон, известный под латинским названием *modus tollens*:

$$((x \rightarrow y) \wedge \neg y) \rightarrow \neg x.$$

Этот закон лежит в основе следующего типа логических заключений: предполагается известным, что утверждение A имплицитно утверждает B , а также становится известным, что утверждение B ложно, тогда на основании *modus tollens* заключают, что A ложно. В несколько измененной форме *modus tollens* записывается так:

$$((\neg x \rightarrow y) \wedge \neg y) \rightarrow x.$$

применение этого метода к получению тождественно истинных формул логики высказываний.

Если до сих пор мы рассматривали формулы логики высказываний как выражения для булевых функций, то в методе формального вывода эти формулы рассматриваются просто как некоторые последовательности символов, построенные по определенным правилам. В соответствии с этим мы дадим новое определение понятия формулы логики высказываний. Для этого сначала задается некоторый список элементарных символов, называемый *алфавитом*. Элементарные символы, входящие в этот алфавит, называются *буквами*. Наш алфавит состоит из следующих букв:

- 1) переменные: x_1, x_2, x_3, \dots (латинская буква с индексом, например x_i , рассматривается как *одна* буква);
- 2) знаки логических операций: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$;
- 3) скобки: $()$.

Далее определяется понятие *слова*. Под словом мы будем понимать любую конечную последовательность букв. Например, словами будут такие выражения:

$$\neg((x_1 \neg, (, \neg \wedge \rightarrow, x_3, (x_2 \vee x_4), \neg \neg \neg x_2.$$

Два слова считаются равными — или, как мы будем говорить, графически равными, — если они состоят из одинаковых букв, записанных в одной и той же последовательности. Таким образом, слова $\neg \neg x_1$ и $\neg \neg x_1$ графически равны между собой, а слова $()$ и \neg не равны, так же как не равны (графически) слова $(x_3 \wedge x_5)$ и $(x_5 \wedge x_3)$. Мы будем обозначать слова большими латинскими буквами A, B, C, D и т. д.

Мы хотим среди всех слов выделить именно те, которые будут как раз уже знакомыми нам формулами логики высказываний. Это, оказывается, нетрудно сделать по одному только виду слов, не обращаясь к какому-либо смыслу составляющих их букв.

Дадим следующее определение понятия формулы:

- 1) Всякая переменная (т. е. слово вида x_1, x_2, x_3, \dots) является формулой.
- 2) Если слова A и B являются формулами, то слова $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \sim B)$ являются формулами.

Никакие другие слова, кроме тех, которые получены по правилам 1) и 2), не являются формулами.

Нетрудно убедиться, что таким образом получаются как раз уже знакомые нам формулы логики высказываний. Дадим примеры правильно построенных формул:

x_3, x_5, x_9, x_{15} — формулы согласно 1).

Следовательно, согласно 2)

$(x_3 \wedge x_5), (x_5 \rightarrow x_9), \neg x_{15}$ — формулы.

Опять согласно 2)

$((x_3 \wedge x_5) \vee (x_5 \rightarrow x_9))$ и $((x_3 \wedge x_5) \sim \neg x_{15})$ — формулы.

И, наконец,

$((x_3 \wedge x_5) \vee (x_5 \rightarrow x_9)) \rightarrow ((x_3 \wedge x_5) \sim \neg x_{15})$ — формула.

Отметим важное свойство данного определения понятия формулы. Можно, оказывается, описать процедуру, которая, будучи применена к любому слову, после конечного числа шагов установит, является ли данное слово формулой или нет, и даже, более того, по записи формулы эта процедура восстановит, в какой последовательности была построена формула. Мы не будем останавливаться на довольно кропотливом доказательстве этого факта. Укажем лишь на то, что для проверки того, является ли некоторое слово формулой, необходимо проверить расположение открывающих и закрывающих скобок, а также расположение операций логики высказываний.

Имея теперь в своем распоряжении совокупность формул как некоторых построенных по определенным правилам последовательностей букв, мы можем сделать следующий шаг в направлении определения понятия формального вывода. Мы опишем сейчас два правила преобразования формул. Эти правила будем называть *правилами вывода*. На основании правил вывода определяется понятие формального вывода.

1. *Правило подстановки*. Из формулы A , содержащей переменную x_i , можно вывести формулу $F_B^{x_i}(A)$, где $F_B^{x_i}(A)$ получена из формулы A подстановкой в нее формулы B на место всех вхождений переменной x_i . Легко видеть, что слово $F_B^{x_i}(A)$ является правильно построенной формулой.

Например, $F_{(x_2 \rightarrow x_3)}^{x_1}((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_1) = (((x_2 \rightarrow x_3) \wedge x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3))$; $F_{x_1}^{x_2}((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2) = ((x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1)$.

Заметим еще, что если переменная x_i не входит в A , то можно определить $F_B^{x_i}(A) = A$.

Для применения правила подстановки нужно знать лишь записи тех формул, в которые производится подстановка, и не требуется знать значений этих формул. Поэтому применение правила подстановки может быть осуществлено с помощью автоматического устройства.

2. *Правило modus ponens*. Второе правило применимо к некоторым двум формулам и дает в результате одну формулу. Пусть мы имеем две формулы вида A и $(A \rightarrow B)$ (здесь важно, что первая формула A графически равна антецеденту второй формулы: наше правило применимо только к таким двум формулам); тогда можно вывести формулу B . В этом случае мы будем говорить, что *формула B получается из формул A и $(A \rightarrow B)$ в результате применения правила modus ponens*. Например, в результате применения правила *modus ponens* к формулам $(x_1 \rightarrow x_2)$ и $((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_2 \wedge x_3))$ получается формула $(x_2 \wedge x_3)$; в результате применения правила *modus ponens* к $(x_1 \wedge x_2)$ и $((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3)$ получается x_3 .

Отметим и подчеркнем следующие свойства правила *modus ponens*. Во-первых, это правило применимо не ко всяким двум формулам, а только к формулам вида A и $(A \rightarrow B)$, где A и B — произвольные формулы. Во-вторых, так же как и в случае правила подстановки, правило *modus ponens* осуществляется над записями формул и может в принципе производиться некоторым автоматическим устройством.

Теперь, наконец, мы можем определить основные понятия — *выводимости и формального вывода*. Пусть Φ — некоторая заданная совокупность формул. Совокупность может быть конечной или бесконечной (но нас в первую очередь будет интересовать случай конечных совокупностей). Применяя к формулам из Φ всевозможным образом определенные выше правила вывода, мы получим некоторую большую совокупность формул Φ_1 , содержащую Φ . Про формулы из Φ_1 мы будем говорить, что они *выводимы из Φ за один шаг*. Далее, будем рассматривать совокупность формул Φ_2 , выводимых за один шаг из Φ_1 . Про них мы будем говорить, что они выводимы из Φ за два шага. Предположим, что мы уже имеем множество формул Φ_n , выводимых из Φ за n шагов. Ту совокупность формул, которые мы можем получить из Φ_n однократным применением

одного из правил вывода (подстановки или *modus ponens*), будем считать совокупностью Φ_{n+1} формул, выводимых из Φ за $n+1$ шаг. Некоторая формула A будет считаться выводимой из Φ , если она выводима из Φ за некоторое конечное число m шагов, т. е. принадлежит некоторому множеству Φ_m . Естественно считать, что сами формулы из Φ выводимы из Φ за 0 шагов ($\Phi_0 = \Phi$).

Под выводом некоторой формулы A из множества формул Φ понимается некоторая последовательность формул

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$$

такая, что каждая из формул A_i или принадлежит Φ , или же получается из предшествующих ей формул A_0, A_1, \dots, A_{i-1} однократным применением одного из приведенных выше правил вывода, причем последняя формула A_n графически равна формуле A , выводимость которой утверждается. Нетрудно видеть, что если для некоторой формулы A имеется вывод из Φ , то она выводима из Φ . При этом, если имеется вывод, состоящий из формул $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$, то A выводима из Φ не более чем за n шагов. Обратно, из определения понятия выводимости формулы следует, что для всякой выводимой формулы существует некоторый вывод. Для уяснения понятия выводимости и вывода рассмотрим несколько простых примеров. Затем мы перейдем к описанию выводимости совокупности тождественно истинных формул.

а) Пусть множество Φ состоит из одной формулы x_1 . Тогда, как сразу видно, произвольная формула A выводима из Φ и притом за один шаг. Действительно, достаточно применить к формуле x_1 правило подстановки $F_A^{x_1}(x_1)$ для того, чтобы получить формулу A . Ее вывод выглядит так: x_1, A . Вообще, если из некоторого заданного множества формул Φ выводима какая-либо однобуквенная формула x_i , то из этого множества выводимы все формулы.

б) Пусть Φ состоит из одной формулы $(x_1 \rightarrow x_2)$. Покажем, что из Φ выводима произвольная формула A . Для этого покажем сперва, что из Φ выводима формула x_2 . Действительно, применим к $(x_1 \rightarrow x_2)$ правило подстановки: $F_{(x_1 \rightarrow x_2)}^{x_1}(x_1 \rightarrow x_2)$. Следовательно, из Φ выводима формула $((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2)$ и, конечно, сама формула $(x_1 \rightarrow x_2)$. К этим двум формулам можно уже применить правило *modus ponens*, в результате чего получается формула x_2 .

Если теперь A — совершенно произвольная формула (скажем, $A = (x_1 \wedge x_2)$), то мы ее можем получить из x_2 по правилу подстановки $F_A^x(x_2)$. Таким образом, окончательно мы получаем для A следующий вывод из формулы $(x_1 \rightarrow x_2)$:

$$(x_1 \rightarrow x_2), ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2), x_2, A.$$

При рассмотрении последнего примера мы воспользовались некоторым простым свойством понятия выводимости, непосредственно вытекающим из определения: если все формулы некоторого множества формул Ψ выводимы из множества формул Φ , а некоторая формула A выводима из Ψ , то A выводима также из Φ .

в) Пусть Φ состоит из формул A , $\neg A$ и $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow x))$. Тогда из Φ выводима любая формула. Применяя правило *modus ponens* к формулам A и $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow x))$, выводим формулу $(\neg A \rightarrow x)$. Применяя еще раз правило *modus ponens* к последней формуле и формуле $\neg A$, выводим формулу x . А как мы видели раньше, если мы вывели переменную x , то мы можем вывести любую формулу.

Это обстоятельство имеет важное значение. Формула $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow x))$ является тождественно истинной, каковы бы ни были формула A и переменная x . Раз эта формула тождественно истинна, то мы можем пользоваться ею в выводах одних тождественно истинных формул из других и, в частности, при построении дедуктивных теорий (о которых подробнее см. в заключении). Поэтому если мы из какой-то системы формул выводим формулы A и $\neg A$, то из этой системы выводится любая формула. Такая система называется *противоречивой*.

г) Конечно, не из любого Φ выводимы все формулы. Например, если Φ состоит из одной формулы $\neg x_1$, то с помощью правила подстановки из Φ можно получить все формулы вида $\neg A$, где A — произвольная формула, и только такие формулы. Ведь нетрудно себе уяснить, что к формулам вида $\neg A$ невозможно применять правило *modus ponens*, а с помощью одних лишь подстановок мы никогда не получим, скажем, формулу x_1 .

Аналогично из множества, состоящего из двух формул $(x_1 \rightarrow x_1)$ и $(x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1))$, можно получить все формулы вида $(A \rightarrow A)$ и вида $(A \rightarrow (A \rightarrow A))$, где A — произвольная формула, и только их. Мы предоставляем проверить это утверждение читателю.

д) Рассмотрим несколько более сложный пример вывода. Пусть Φ состоит из двух формул

$$R_1 \equiv (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))$$

и

$$R_2 \equiv ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))).$$

Следует указать вывод формулы $(x_1 \rightarrow x_1)$ из Φ и тем самым доказать выводимость $(x_1 \rightarrow x_1)$ из Φ . Покажем сначала выводимость формулы $(x_4 \rightarrow x_4)$ из Φ , откуда уже подстановкой x_1 вместо x_4 сразу получается $(x_1 \rightarrow x_1)$. Итак, применим последовательно подстановки x_4 вместо x_2 и x_4 вместо x_1 к формуле R_2 . Получаем формулу $R_3 \equiv ((x_4 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_4)) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_4)))$. Теперь подставим в R_1 x_4 вместо x_1 ; получаем $R_4 \equiv ((x_4 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_4)))$. Применяем правило *modus ponens* к R_4 и R_3 . В результате получается $R_5 \equiv ((x_4 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_4))$. Обращаемся опять к формуле R_1 и переводим ее подстановками сначала в $(x_1 \rightarrow (x_4 \rightarrow x_1))$, а потом в $(x_2 \rightarrow (x_4 \rightarrow x_2))$. В последней формуле производим подстановку R_1 вместо x_2 . В результате получается формула $R_6 \equiv (R_1 \rightarrow (x_4 \rightarrow R_1))$ (или, если ее детально выписать, $R_6 \equiv ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)) \rightarrow (x_4 \rightarrow (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))))$). Применим правило *modus ponens* к R_1 и R_6 . Получаем $R_7 \equiv (x_4 \rightarrow R_1)$. В R_5 производим подстановку R_1 вместо x_2 , а получаемую формулу $((x_4 \rightarrow R_1) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_4))$ обозначим через R_8 . Теперь по правилу *modus ponens*, примененному к R_7 и R_8 , получаем, наконец, $(x_4 \rightarrow x_4)$, откуда уже подстановкой x_1 вместо x_4 окончательно выводятся $(x_1 \rightarrow x_1)$.

Приведем еще раз этот вывод в обозримой форме

$\Phi \left\{ \right.$	R_1	$(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))$	
	R_2	$((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)))$	
		$((x_4 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_3)))$	$F_{x_1}^{x_4}(R_2)$
	R_3	$((x_4 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_4)) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_4)))$	$F_{x_1}^{x_4}(F_{x_1}^{x_4}(R_2))$
	R_4	$(x_4 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_4))$	$F_{x_1}^{x_4}(R_1)$

R_3	$((x_4 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_4))$	правило <i>modus ponens</i> к R_4 и R_2
	$(x_1 \rightarrow (x_4 \rightarrow x_1))$	$F_{x_1}^{x_2}(R_1)$
	$(x_2 \rightarrow (x_4 \rightarrow x_2))$	$F_{x_2}^{x_1}(F_{x_1}^{x_2}(R_1))$
R_6	$(R_1 \rightarrow (x_4 \rightarrow R_1))$	$F_{R_1}^{x_2}(F_{x_2}^{x_1}(F_{x_1}^{x_2}(R_1)))$
R_7	$(x_4 \rightarrow R_1)$	правило <i>modus ponens</i> к R_1 и R_6
R_8	$((x_4 \rightarrow R_1) \rightarrow (x_4 \rightarrow x_4))$	$F_{R_1}^{x_2}(R_5)$
R_9	$(x_4 \rightarrow x_4)$	правило <i>modus ponens</i> к R_7 и R_8
	$(x_1 \rightarrow x_1)$	$F_{x_1}^{x_2}(R_9)$

В примере г), как нетрудно проверить, обе формулы R_1 и R_2 — тождественно истинные формулы логики высказываний. Оказывается, что сформулированные нами правила вывода обладают тем замечательным свойством, что они всегда переводят тождественно истинные формулы в тождественно истинные. Рассмотрим это утверждение несколько более внимательно. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \equiv A$ — правильно построенная формула, в которой участвуют только переменные x_1, x_2, \dots, x_n , и пусть эта формула тождественно истинна. Пусть в результате подстановки произвольной формулы B вместо переменной x_i получается некоторая формула C . В результате подстановки в формуле C , вообще говоря, будут встречаться наряду с переменными x_1, x_2, \dots, x_n также те переменные, из которых была построена формула B . Итак, пусть формула C зависит от переменных x_1, x_2, \dots, x_m , что мы отметим в ее записи $C = C(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Теперь можно сообразить, что формула

$C(x_1, x_2, \dots, x_m)$ будет тождественно истинной. Действительно, при вычислении значения формулы $C(x_1, x_2, \dots, x_m)$ для некоторого набора значений переменных следует, очевидно, поступать так: вычислить сначала значение формулы B и подставить в формулу A вместо x_i найденное значение, а для других переменных, встречающихся в A , подставить приданные им значения. Но так как формула A была по предположению тождественно истинна, то она принимает значение u при любых наборах, а следовательно, и при указанной нами процедуре. Тем самым *при применении правила подстановки тождественно истинная формула переходит опять в тождественно истинную формулу.*

Предположим теперь, что даны две тождественно истинные формулы вида A и $(A \rightarrow B)$. Как мы видели в предыдущем параграфе, если формула $(A \rightarrow B)$ тождественно истинна, то формула B принимает значение u для всех наборов, для которых формула A принимает значение u . Но так как A тождественно истинна, то она принимает значение u для всех наборов. Следовательно, и B принимает значение u при всех наборах и является тождественно истинной формулой. Отсюда видно, что *правило тождественно истинных формул переводит тождественно истинные формулы A и $(A \rightarrow B)$ в тождественно истинную формулу B .*

Вывод формулы A из некоторого множества формул Φ осуществляется последовательным применением правил вывода к формулам из Φ . Отсюда вытекает следующий основной факт. *Если Φ состоит из некоторого множества тождественно истинных формул, то из Φ выводимы только тождественно истинные формулы.* Так как не все правильно построенные формулы тождественно истинны, то во всяком случае из Φ выводимы не все формулы.

Вообще говоря, если задать произвольное множество Φ тождественно истинных формул, то и не все тождественно истинные формулы могут быть выведены из Φ . Например, из Φ , состоящего из двух формул $(x_1 \rightarrow x_1)$ и $(x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1))$, могут быть выведены только формулы вида $(A \rightarrow A)$ и $(A \rightarrow (A \rightarrow A))$ и не может быть выведена, скажем, тождественно истинная формула $(x_1 \vee \neg x_1)$. Возникает нетривиальный вопрос: можно ли указать некоторый конечный набор Φ тождественно истинных формул такой, что всякая тождественно истинная формула

будет выводима из Φ ? (Здесь акцент делается на конечности системы формул Φ , так как бесконечную совокупность Φ , обладающую требуемым свойством, указать просто: можно взять в качестве Φ множество *всех* тождественно истинных формул.) Оказывается, что этот вопрос имеет положительный ответ. Эта важная теорема, называемая *теоремой о полноте исчисления высказываний*, была впервые доказана американским математиком Э. Постом в 1921 г. и после этого много раз передоказывалась различными авторами. При этом в основу брались различные конечные наборы Φ . Укажем для определенности один из наборов Φ , предложенный Гильбертом и Бернайсом, из которого, как доказано, выводимы все тождественно истинные формулы:

- 1) $(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))$;
- 2) $((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1) \rightarrow x_1$;
- 3) $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))$;
- 4) $(x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_1$;
- 5) $(x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_2$;
- 6) $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_1 \rightarrow (x_2 \wedge x_3)))$;
- 7) $x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)$;
- 8) $x_2 \rightarrow (x_1 \vee x_2)$;
- 9) $(x_1 \rightarrow x_3) \rightarrow ((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow ((x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3))$;
- 10) $(x_1 \sim x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$;
- 11) $(x_1 \sim x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$;
- 12) $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \sim x_2))$;
- 13) $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (\neg x_2 \rightarrow \neg x_1)$;
- 14) $x_1 \rightarrow \neg \neg x_1$;
- 15) $\neg \neg x_1 \rightarrow x_1$.

Различные доказательства теоремы о полноте довольно сложны, и мы не будем на них останавливаться. (Хорошее изложение содержится в книге П. С. Новикова «Элементы математической логики», Физматгиз, 1959.) Мы же остановимся только на смысле этой теоремы о полноте.

В предыдущих параграфах мы выяснили особое значение тождественно истинных формул логики высказываний. Естественным образом возникает вопрос об обозрении совокупности всех таких формул. Метод формального вывода дает

одно из возможных решений этой задачи, которое можно резюмировать следующим образом:

1) Можно задать некоторые правила преобразований формул, которые обладают тем свойством, что, примененные к тождественно истинным формулам, они дают в результате всегда тождественно истинные формулы. Такими правилами являются определенные нами правила вывода, а именно правило подстановки и правило *modus ponens*.

2) Можно задать конечное число тождественно истинных формул таких, что любая тождественно истинная формула может быть получена из них последовательным применением указанных правил вывода. Такой совокупностью тождественно истинных формул является, например, приведенный нами список формул, предложенный Гильбертом и Бернайсом. Что из него применением правил вывода можно получить все тождественно истинные формулы, составляет как раз содержание теоремы о полноте.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Предикаты

1. Как мы видели, одной из основных задач логики высказываний является изучение истинности или ложности сложных высказываний в зависимости от истинности или ложности входящих в них простых высказываний. Мы познакомились с основами этой области логики. Несмотря на ее большую важность, она оказывается слишком бедной для описания и для изучения даже простейших заключений науки и практики. В рамки логики высказываний не укладываются ни аристотелевская теория силлогизмов, ни простейшие заключения арифметики и геометрии, не говоря уже о зачастую довольно сложных логических выводах, с которыми мы сталкиваемся в других науках и в повседневной жизни.

Действительно, рассмотрим следующие простейшие заключения.

Из истинных высказываний «3 меньше 5» и «5 меньше 7» мы заключаем, что «3 меньше 7». Из истинных высказываний «Все птицы — животные» и «Все воробьи — птицы» мы делаем заключение: «Все воробьи — животные». Из высказываний «Пётр — сын Ивана» и «Павел — сын Петра» мы заключаем: «Павел — внук Ивана» и т. д.

Заметим, что во всех рассматриваемых примерах истинность заключения зависит не только от истинности посылок, но и от их строения. Если изменить вид посылок, то может оказаться, что заключение будет неверным. Так (в первом примере) из истинных высказываний «3 меньше 5» и «5 не равно 7» нельзя делать заключение (которое оказывается истинным), что «3 меньше 7», или — изменив немного второй пример — из истинных

высказываний «Все птицы—животные» и «Никакие рыбы не птицы» нельзя выводить ни ложное высказывание «Никакие рыбы не животные», ни истинное высказывание «Все рыбы — животные». Наконец, видоизменив последний пример, из истинных высказываний «Пётр — сын Ивана» и «Павел — родственник Петра», мы не имеем права делать заключение (которое в действительности может быть как истинным, так и ложным), что «Павел — внук Ивана» (но можем вывести истинное заключение «Павел—родственник Ивана»).

Во всех рассмотренных допустимых примерах мы убеждаемся, что истинность или ложность заключения зависит не только от истинности посылок, но и от их содержания. Таким образом, для того чтобы построить систему правил, позволяющих нам автоматически (т. е. по виду языкового выражения) делать заключения, подобные вышеприведенным, мы должны исследовать в некоторой мере строение этих высказываний.

Важным шагом в этом направлении является область математической логики, называемая логикой предикатов. С ней мы немного познакомимся в настоящем параграфе.

Логика предикатов предполагает логику высказываний уже известной, но идет дальше. Здесь простые высказывания, входящие в заключение, расчленяются. Поэтому иногда взаимоотношение логики высказываний и предикатов выражают образно, говоря, что логика высказываний является «молекулярной» логикой, а логика предикатов — «атомарной» логикой. Эти сравнения выражают некоторую аналогию с физическими теориями. В некоторых физических теориях, как, например, в молекулярной теории газов, рассматриваются взаимоотношения между молекулами так, что внутреннее строение этих последних не учитывается: они рассматриваются как основные, нерасчленяемые далее элементы. В других теориях — как, например, в физической химии — одновременно рассматриваются и взаимоотношения между молекулами и отчасти их строение из атомов (атомарная теория). Конечно, не следует слишком далеко проводить эту аналогию.

2. Логика предикатов начинается с анализа строения простых высказываний. Она исходит из следующей установки.

Простые высказывания выражают, что некоторые объекты (или объект) обладают некоторыми свойствами или

же что они находятся между собой в некоторых отношениях.

При этом понятие «свойство» и понятие «отношение» рассматриваются как частные случаи общего понятия «предиката» (иногда говорят «атттрибут»). Объекты, о которых говорится в высказывании, называются «термами». Постараемся выяснить смысл этих понятий на примерах.

Рассмотрим сначала некоторое число простых предложений — высказываний, выражающих, что некоторый объект обладает некоторым свойством:

«Сократ — грек»;

«Платон — ученик Сократа»;

«Три — простое число»;

«Москва — столица СССР»;

«Василий — студент» и т. д.

Все приведенные примеры — простые предложения. С точки зрения грамматики они состоят из подлежащего («Сократ», «Платон», «три», «Москва», «Василий») и сказуемого («есть грек», «есть ученик Сократа», «есть простое число», «есть столица СССР», «есть студент»). Подлежащее является наименованием некоторого объекта — конкретного или абстрактного, сказуемое выражает некоторое свойство. Основным для логики предикатов является второй член предложения — сказуемое-свойство. Как же логика предикатов трактует это понятие «свойство»? Она рассматривает его как некоторую функцию, а именно следующим образом.

Возьмем первый пример:

«Сократ есть грек».

Вместо имени человека Сократ мы можем подставлять имена всевозможных людей и будем получать всегда осмысленные предложения. Одни предложения будут истинными, другие — ложными:

«Сократ есть грек» — истинно;

«Платон есть грек» — истинно;

«Наполеон есть грек» — ложно;

«Ньютон есть грек» — ложно и т. д.

Более общо можно рассматривать выражение вида

«X есть грек»,

где буква *X* указывает место, на которое нужно подставить имя некоторого человека, чтобы получить высказывание — истинное или ложное. Само выражение *«X есть грек»* — еще не высказывание, а только форма, заготовленная для высказывания. А. Тарский в известной книге «Введение в логику и методологию дедуктивных наук» [22] очень образно сравнивает подобную разницу между формой для высказывания и высказыванием с разницей между формуляром для анкеты и анкетой. Формуляр анкеты является заготовленной формой, содержащей определенное число пустых мест, в которые надлежит вписать определенные данные, в результате чего и получается то, что называется анкетой. Подобным формуляром является и выражение *«X есть грек»*. Здесь *X* — это графа, в которую нужно вписать имя какого-нибудь человека, в результате чего и получится высказывание. Вот это выражение *«X есть грек»* логика предикатов отождествляет с понятием свойства «быть греком». Таким образом, свойство становится функцией, зависящей от объекта, имя которого подставляется вместо буквы *X*, и принимающей в качестве значения высказывание. Но, как нам уже известно, существенным свойством высказывания является его значение истинности *и* или *л*. Становясь на эту точку зрения, логика предикатов считает выражение *«X есть грек»* функцией, аргумент которой *X* пробегает класс всех людей, а сама функция принимает в качестве значений *и* или *л*. Если мы будем, как это принято в математике, *«X есть грек»* записывать сокращенно, например, в виде $\text{Гр}(X)$, то для значения $X = \text{Сократ}$ получим $\text{Гр}(\text{Сократ}) = \text{и}$, а скажем, $\text{Гр}(\text{Наполеон}) = \text{л}$ и т. д. Относительно других приведенных примеров можно дословно повторить все то, что было сказано относительно первого примера.

Остановимся только несколько более подробно на примере «Три есть простое число» и на соответствующем предикате-свойстве «быть простым числом». Введем для этого свойства сокращенное обозначение $\text{Пр}(X)$. Предикат $\text{Пр}(X)$ определен на множестве натуральных чисел. Имеем $\text{Пр}(1) = \text{л}$ (заметим, что 1 принято рассматривать как непростое число), $\text{Пр}(2) = \text{и}$, $\text{Пр}(3) = \text{и}$, $\text{Пр}(4) = \text{л}$, ..., ..., $\text{Пр}(10) = \text{л}$, $\text{Пр}(11) = \text{и}$ и т. д. Подобный предикат, опре-

деленный на множестве натуральных чисел, удобно представить в виде таблицы (или матрицы).

Матрица предиката $\text{Пр}(X) = \langle X \text{ есть простое число} \rangle$

X	1	2	3	4	5	6	7...
$\text{Пр}(X)$	л	и	и	л	и	л	и ...

Сверху в таблице последовательно записаны натуральные числа, снизу стоит буква *и* для тех чисел, которые являются простыми, и *л* для тех, которые этим свойством не обладают. Аналогично свойство «быть четным числом» представится следующей таблицей (матрицей):

Матрица предиката $\text{Чет}(X) = \langle X \text{ есть четное число} \rangle$

X	1	2	3	4	5 ...
$\text{Чет}(X)$	л	и	л	и	л ...

Вообще произвольную таблицу подобного вида мы рассматриваем, как представление некоторого предиката-свойства, определенного на множестве натуральных чисел. Два свойства рассматриваются как одинаковые, если совпадают их таблицы, т. е. если они истинны для одних и тех же значений аргументов.

Резюмируя все сказанное, мы можем дать следующее определение.

*Если мы имеем какую-нибудь совокупность объектов M , то под предикатом-свойством на этой совокупности мы понимаем функцию на M , принимающую значения «и» и «л». Отсюда сразу видно, что в действительности всякий предикат-свойство вполне определяется подмножеством тех объектов, на которых данная функция принимает значение «истинно». Определяя на M какую-нибудь функцию со значениями *и* и *л*, мы тем самым разбиваем M на две совокупности: на множество тех объектов, для которых значением функции будет *и* (т. е. множество тех объектов,*

которые обладают данным свойством), и на множество тех объектов, для которых значением функции будет λ (т. е. множество тех объектов, которые данным свойством не обладают).

Очень часто приходится рассматривать предикаты-свойства, определенные на конечных множествах. Тогда и предикатов существует конечное число. Их столько же, сколько подмножеств множества M . Если множество M содержит n элементов, то имеется 2^n подмножеств и столько же предикатов-свойств. Как для случая конечных, так и для случая бесконечных совокупностей среди всех предикатов имеются два замечательных, играющих большую роль во всей теории. Один предикат — это тот, который истинен для всех объектов рассматриваемого множества; он называется *тождественно истинным предикатом*. Другой предикат — *тождественно ложный* — это тот, который принимает значение «ложно» для всех объектов из M .

Сразу хотелось бы отметить то огрубление, которое делает логика предикатов, рассматривая свойства так, как было объяснено. Заметим, например, что в этом понимании свойства «быть человеком» и свойство «быть двуногим существом без перьев» являются одним и тем же свойством. Вообще два свойства, которые удовлетворяются одними и тем же объектами, с рассматриваемой точки зрения не различаются. Есть такие области логики, которые изучают более тонкие различия между свойствами. Два свойства могут удовлетворяться одними и теми же объектами и тем не менее иметь различный смысл. Такого различия логика предикатов не делает. Она стоит на так называемой «объемной» (или «экстенциональной») точке зрения в отличие от логики, различающей свойства не только «по объему», но еще и «по смыслу» и называющейся «интенциональной» логикой.

3. Подобно приведенным предикатам-свойствам математическая логика рассматривает более общее понятие предиката-отношения. В зависимости от того, между каким числом объектов устанавливается отношение, мы различаем двуместные (бинарные), трехместные (тернарные) и т. д., в общем случае — n -местные отношения. Рассмотренные выше предикаты-свойства считаются частным случаем предикатов-отношений, а именно, одноместными (унарными) предикатами. Наконец, удобным оказывается вклю-

чить и высказывания в понятие предиката-отношения как частный случай — в качестве 0-местных предикатов.

Рассмотрим несколько более подробно понятие бинарного отношения. В качестве примеров из повседневной жизни для пояснения понятия отношения удобно брать различные отношения родства, описываемые словами «брат», «сестра», «отец», «мать», «дядя», «тетя», «муж», «жена», «зять» и т. д. Все математические дисциплины имеют дело с предикатами-отношениями, причем самыми распространенными являются бинарные отношения. Они описываются различными словами: «равны», «не равны», «больше», «меньше», «делит», «перпендикулярны», «параллельны» и т. д.

Рассмотрим высказывание «Иван — брат Петра», говорящее о том, что определенные мужчины по имени «Иван» и «Петр» находятся между собой в некотором отношении родства, которое на русском языке обозначается словом «брат». Аналогично, как и в случае предиката-свойства, двуместное отношение «брат» считается как некоторое «неполное высказывание», как некоторая «форма высказываний». Мы мыслим его записанным примерно так:

«... — брат...».

При этом предполагается, что вместо первого и второго многоточия можно подставлять мужские имена, после чего форма высказываний превращается в высказывание — истинное или ложное. (Мы для определенности будем считать, что рассматривается отношение «брат» между мужчинами, т. е. мы исключаем из рассмотрения предложения вида «Иван — брат Марии».) Например,

Иван — брат Петра,
Иван — брат Павла,
Сергей — брат Антона и т. д.

Вместо первого и второго многоточия подставляются различные имена. Естественно поэтому общую форму вышеуказанных высказываний записывать так:

«X — брат Y».

Здесь буквы X и Y являются обозначениями мест, на которые следует подставлять мужские имена, чтобы получать правильно построенные высказывания. При всевозможных подстановках в это выражение вместо X и Y имен

конкретных людей ¹⁾ всегда будут получаться осмысленные высказывания, обязательно истинные или ложные. Указание на то, какие из них истинны, а какие ложны, и считается определением интересующего нас отношения. Поэтому отношение «брат» мы рассматриваем как функцию двух переменных, пробегающих независимо друг от друга множество людей мужского пола и принимающих значения u и l . Как и в случае предиката-свойства, удобно записывать подобную функцию в принятом функциональном обозначении, например $\text{Бр}(X, Y)$. Функция $\text{Бр}(X, Y)$ после подстановки вместо X и Y имен определенных людей принимает значение u или l в зависимости от того, являются ли указанные два человека братьями или нет.

Рассмотрим еще два примера бинарных отношений, определенных на множестве натуральных чисел, а именно отношение, описываемое словом «больше», и отношение, описываемое словом «делит». В первом случае мы имеем форму высказываний

« X больше Y »,

во втором — форму высказываний

« X делит Y ».

Если рассматривать эти формы высказываний как функции от двух переменных X и Y , пробегающие множества натуральных чисел и принимающие значения u или l в зависимости от того, будет ли соответствующее высказывание истинным или ложным, то эти формы определяют два предиката, которые мы обозначим через $>(X, Y)$ и $\text{Дел}(X, Y)$ ²⁾.

¹⁾ При этом предполагается, конечно, что именами «Иван» или «Петр» данный человек однозначно определен. Когда в повседневной жизни употребляют утверждение «Иван — брат Петра», то обыкновенно говорящие знают, о каких именно Иване и Петре идет речь. В противном случае, если указание одного краткого имени оказывается недостаточным для понимания высказывания, так как среди знакомых собеседников имеются много Иванов и Петров, то употребляются более обширные «имена» с указанием каких-либо дополнительных признаков, например «Иван, живущий на улице Горького» или «Петр, находящийся в этой комнате» и т. д.

²⁾ Предикат $>(X, Y)$ записывается обыкновенно в виде $X > Y$. Мы употребляем запись $>(X, Y)$ — привычное обозначение функций — для того, чтобы подчеркнуть, что предикаты — это функции.

Тогда для предиката $> (X, Y)$ имеем, например,
 $> (3, 2) = и$, $> (1, 3) = л$, $> (7, 5) = и$ и т. д.,

а для предиката Дел (X, Y) имеем, например,

Дел $(3, 6) = и$, Дел $(5, 10) = л$, Дел $(7, 9) = л$ и т. д.

Более полно и обозримо двуместные предикаты $> (X, Y)$ и Дел (X, Y) можно представить в табличной форме с помощью матриц нижеследующим образом:

Матрица предиката $> (X, Y)$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	7	...
1	л	л	л	л	л	л	л	...
2	и	л	л	л	л	л	л	...
3	и	и	л	л	л	л	л	...
4	и	и	и	л	л	л	л	...
5	и	и	и	и	л	л	л	...
6	и	и	и	и	и	л	л	...
7	и	и	и	и	и	и	л	...
...

Матрица предиката Дел (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	и	и	и	и	и	и	и	и	...
2	л	и	л	и	л	и	л	и	...
3	л	л	и	л	л	и	л	л	...
4	л	л	л	и	л	л	л	и	...
5	л	л	л	л	и	л	л	л	...
6	л	л	л	л	л	и	л	л	...
...

На данных примерах нетрудно себе уяснить, как составляется матрица некоторого предиката $P(X, Y)$,

определенного на множестве натуральных чисел. Числа выписываются последовательно по горизонтали и по вертикали. Каждая строка соответствует некоторому значению переменной X , каждый столбец — некоторому значению Y . В пересечении i -й строки и j -го столбца записывается буква u , если высказывание $P(i, j)$ имеет значение u , и буква $л$, если $P(i, j) = л$. Таким образом, всякому предикату $P(X, Y)$ соответствует некоторая матрица и, обратно, всякой матрице соответствует некоторый предикат. Конечно, так как X и Y пробегают бесконечное множество всех натуральных чисел, то фактически возможно выписывать только конечную, хотя и сколь угодно большую часть матрицы. В большинстве случаев уже по такой конечной части можно себе представить ее строение. Мы рекомендуем читателю для уяснения понятия двуместного предиката составить матрицы других известных ему отношений, определенных на множестве натуральных чисел, например, для предикатов

Пред $(X, Y) \equiv \text{«}X \text{ предшествует } Y\text{»},$

Кв $(X, Y) \equiv \text{«}Y \text{ равен квадрату } X\text{» и}$

НД $(X, Y) \equiv \text{«}Y \text{ является наибольшим делителем } X,$
отличным от $X\text{»}.$

Заметим, что матрица предиката-отношения « X равно Y », который записывается также привычным образом в виде « $X=Y$ », имеет следующий простой вид: на диагонали таблицы записана повсюду буква u , на всех остальных местах — буква $л$. Особенно удобным оказывается представление предикатов-отношений матрицами для того случая, когда рассматриваются отношения на некотором конечном множестве объектов. В этом случае существует только конечное число бинарных отношений, и вся матрица — по крайней мере в принципе — может полностью быть выписана. Рассмотрим для примера отношение «знакомства» в некотором коллективе людей. Пусть мы имеем некоторый коллектив, состоящий из людей по имени «Антон», «Василий», «Владимир», «Павел», «Петр», «Анна», «Вера», «Надежда», «Любовь», «Мария». Нас интересует отношение знакомства в этом коллективе, т. е. ответ на вопрос «Кто с кем знаком?» Отношение знакомства является двуместным предикатом $Зн(X, Y)$, соответствующим форме высказывания « X знаком с Y ». Конечно, следует

считать, что всякий человек знаком с самим собой, и если X знаком с Y , то и Y знаком с X . (Говорят, что отношение знакомства *рефлексивно*: $\exists n (X, X) = u$ для всех X и *симметрично*: если $\exists n (X, Y)$, то $\exists n (Y, X)$. В остальном оно может быть произвольным.) Полную, и обозримую информацию о том, кто в данном коллективе знаком между собой, дает матрица этого отношения, например,

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	Антон	Василий	Владимир	Павел	Петр	Анна	Вера	Надежда	Любовь	Мария
Антон	и	л	и	л	и	и	и	л	и	л
Василий	л	и	л	и	и	и	л	л	и	л
Владимир	и	л	и	л	л	л	и	и	и	и
Павел	л	и	л	и	л	л	л	и	л	и
Петр	и	и	л	л	и	л	и	и	и	и
Анна	и	и	л	л	л	и	л	и	л	и
Вера	и	л	и	л	и	л	и	л	л	и
Надежда	л	л	и	и	и	и	л	и	л	и
Любовь	и	и	и	л	и	л	л	л	и	л
Мария	л	л	и	и	и	и	и	и	л	и

Такая матрица полностью описывает соответствующий предикат, указывая для любых двух людей рассматриваемого коллектива, знакомы они между собой или нет. В приведенном примере, скажем, мы видим, что высказывание «Анна знакома с Василием» истинно, а «Анна знакома с Петром» ложно и т. д. Свойство рефлексивности отношения «знакомства» соответствует тому факту, что на диагонали, ведущей с верхнего левого угла матрицы в правый нижний угол, повсюду записаны буквы *и*; свойству симметричности соответствует то, что клетки матрицы, симметричные относительно этой диагонали, содержат одинаковые буквы.

Читатель теперь без труда сможет уяснить сам себе, что следует понимать под трехместным, четырехместным и вообще n -местным предикатом, определенным на некотором множестве объектов. В качестве трехместного

отношения родства укажем на предикат, выражаемый формой высказывания « X и Y являются родителями Z ». В геометрии часто приходится рассматривать трехместный предикат, описываемый словом «между» («Точка X лежит между точками Y и Z »). В качестве примера трехместного предиката из арифметики укажем на отношение, описываемое формой высказывания « X есть наибольший общий делитель чисел Y и Z ».

Ясно, что для представления трехместных предикатов в матричной форме естественно рассматривать трехмерные матрицы. В общем случае для представления n -местных предикатов соответственно понадобились бы n -мерные матрицы. Конечно, преимущество наглядности представления предикатов матрицами для таких многоместных предикатов во многом теряется. В нашем кратком обзоре некоторых основных понятий математической логики мы не будем подробнее обсуждать смысл и свойства более чем двуместных предикатов. В принципе они не более сложны, чем двуместные, и они рассматриваются вполне аналогично двуместным.

Вернемся к двуместным предикатам. Будем для определенности рассматривать предикаты, определенные на множестве натуральных чисел. Заметим, что всякая функция $Y=f(X)$, аргументы и значения которой — натуральные числа, может рассматриваться как частный случай двуместного предиката. А именно, функции $Y=f(X)$ однозначным образом сопоставляется некоторый предикат $F(X, Y)$ на множестве натуральных чисел, принимающий значение $и$ для пар чисел $X=a, Y=b$ в том и только в том случае, если $b=f(a)$. Очевидно, что такой предикат в свою очередь вполне определяет соответствующую функцию. Поясним себе это обстоятельство на примере, скажем, функции $Y=X^2$, рассматриваемой как функция на множестве натуральных чисел. Соответствующий двуместный предикат — обозначим его через $Q(X, Y)$ — принимает значение $и$ для таких пар чисел $X=a, Y=b$, для которых $b=a^2$, и значение $л$, если $b \neq a^2$. Например,

$Q(1,1) = и, Q(2,4) = и, Q(2,7) = л, Q(5,25) = и$ и т. д.

Составим матрицу этого предиката, но запишем ее в несколько измененном виде, а именно, будем записывать значения переменной $Y, Y=1, 2, 3, \dots$, не сверху вниз, а снизу вверх (рис. 9).

строке матрицы должна встречаться буква u (всякому элементу a соответствует некоторый элемент) и встречается она в точности один раз (всякому элементу a соответствует точно один элемент). Ясно, что далеко не все матрицы и тем самым не все двуместные предикаты обладают этим свойством.

Остановимся еще на одном свойстве предикатов. Пусть, например, речь идет о двуместном предикате $<(X, Y)$, определенном на множестве натуральных чисел. Мы уже знаем, что после подстановки вместо переменных X и Y определенных чисел получается высказывание. Естественно возникает вопрос: во что переходит двуместный предикат, если произвести подстановку некоторого числа вместо только одной переменной? Положим, скажем, $Y=4$. Выражение $<(X, 4)$ зависит только от одной переменной X , т. е. это одноместный предикат. Он выражает свойство «быть числом, меньшим 4» и тем самым удовлетворяется как раз числами 1, 2, 3. Подобным же образом при подстановке $X=4$ возникает одноместный предикат $<(4, Y)$, выражающий свойство «быть числом, большим 4». Нетрудно уяснить себе, что таблица одноместного предиката $<(X, 4)$ задается столбцом, соответствующим числу 4 в матрице предиката $<(X, Y)$, и аналогично таблица одноместного предиката $<(4, Y)$ задается строкой этой матрицы, отвечающей числу 4. Вообще для любого двуместного предиката $P(X, Y)$, заданного на любом множестве, при подстановке наименования a некоторого объекта из M вместо переменной X или Y возникают одноместные предикаты. Таблица одноместного предиката $P(X, a)$ получается следующим образом: переменной X ставится в соответствие последовательно элементы того столбца матрицы $P(X, Y)$, который отвечает значению $Y=a$. Подобным же образом таблица предиката $P(a, Y)$ получается из матрицы $P(X, Y)$ выделением строки, соответствующей объекту $X=a$.

Нетрудно себе уяснить, что, исходя из трехместного предиката $P(X, Y, Z)$, подстановкой постоянного элемента a из M вместо одной из переменных X, Y, Z получаются двуместные предикаты, вообще говоря, различные. Более общо, зафиксируем некоторое число m переменных в n -местном предикате $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и подставим вместо них постоянные, тогда n -местный предикат превращается в $(n-m)$ -местный. Это соображение наводит на мысль

считать высказывания нульместными предикатами, возникающими из многоместных предикатов подстановкой обозначений определенных объектов вместо всех переменных.

§ 2. Применение операций логики высказываний к предикатам

Ознакомившись с понятием предиката, мы переходим теперь к рассмотрению операций, позволяющих из некоторых исходных предикатов строить новые. В настоящем параграфе мы обсудим применение операций логики высказываний к предикатам. В следующем параграфе мы познакомимся с некоторыми новыми операциями — кванторами, которые типичны для логики предикатов.

Мы начнем наше изучение с простейшего случая одноместных предикатов. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два одноместных предиката, определенных на некотором множестве M . С помощью операций логики высказываний $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \sim, \mid$ мы можем строить новые предикаты на множестве M . Конъюнкция $P(x) \wedge Q(x)$ — это предикат $R_1(x) \equiv P(x) \wedge Q(x)$, который истинен для тех и только тех объектов x из M , для которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ истинны. Аналогично определяется дизъюнкция $P(x) \vee Q(x)$:

$$R_2(x) \equiv P(x) \vee Q(x).$$

$R_2(x)$ — предикат на M , который истинен в точности для тех x , для которых истинен по меньшей мере один из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$. Точно так же определяется отрицание $P(x)$:

$$R_3(x) \equiv \neg P(x).$$

$R_3(x)$ — предикат на M , истинный для тех и только тех $x \in M$, для которых $P(x)$ ложен.

Подобным же образом вводятся операции $P(x) \rightarrow Q(x)$, $P(x) \sim Q(x)$, $P(x) \mid Q(x)$.

Как видно, определения операций логики высказываний над предикатами вполне естественны. Их общая схема такова: пусть ∇ — какая-нибудь операция логики высказываний. Тогда она определяет операцию над предикатами: $R(x) \equiv P(x) \nabla Q(x)$. Ведь предикат $R(x)$ определен, если для всякого объекта a из M установлено, будет

ли значением $R(a)$ и или λ . А это устанавливается так: по значениям истинности $P(a)$ и $Q(a)$ согласно таблице истинности для операции ∇ находится значение истинности $P(a) \nabla Q(a)$. Так найденное значение истинности и считается значением истинности $R(a)$ предиката $R(x)$ для $x = a$.

Если, например, $P(x)$ — предикат-свойство «быть англичанином», $Q(x)$ — предикат «быть студентом» (множество M будем считать множеством всех людей), то $P(x) \wedge Q(x)$ обозначает свойство «быть англичанином и быть студентом». Этим свойством обладают те и только те люди, которые одновременно являются англичанами и студентами. Предикат $P(x) \vee Q(x)$ обозначает свойство «быть англичанином или быть студентом», предикат $\neg P(x)$ — свойство «быть не англичанином» (ему удовлетворяют те люди, которые не являются англичанами); предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$ истинен для тех $x \in M$, которые или не англичане или студенты и т. д.

Булевы операции \wedge, \vee, \neg над одноместными предикатами соответствуют операциям над множествами, называемыми *пересечением*, *объединением* и *дополнением*. Эти элементарные операции играют большую роль во всех областях математики и ее применениях. Поэтому целесообразно вкратце на них остановиться и выяснить их связь с булевыми операциями над одноместными предикатами.

Мы исходим из того, что имеется какое-то множество M объектов, являющихся предметом нашего рассмотрения. Например, M — множество всех людей или M — множество всех натуральных чисел, или M — множество всех точек плоскости и т. д. Такое исходное множество всевозможных объектов, которые мы собираемся рассматривать, изучать и о которых мы будем говорить, принято называть *универсумом*.

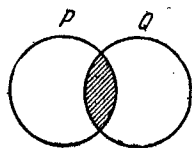


Рис. 11.

Будем считать для определенности, что универсум M — это множество всех натуральных чисел. Рассматриваются всевозможные множества, содержащиеся в M . Пусть P и Q — два множества.

Пересечение $P \cap Q$ — это множество всех объектов (из M), которые принадлежат как P , так и Q . На рис. 11 мы заштриховали пересечение $P \cap Q$. Если P и Q общих

элементов не имеют, то говорят, что пересечение $P \cap Q$ пусто (пустое множество).

Объединением $P \cup Q$ называется множество тех элементов, которые принадлежат по меньшей мере одному из множеств P и Q . На рис. 12 множество $P \cup Q$ заштриховано. Под дополнением \bar{P} множества P понимается множество всех элементов из M , не принадлежащих множеству P .

На рис. 13 множество \bar{P} заштриховано.

Приведем примеры этих понятий. Пусть P — множество всех четных чисел: $\{2, 4, 6, \dots\}$,

Q — множество всех целых квадратов: $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Пересечение $P \cap Q$ — это множество всех четных квадратов: $\{4, 16, 36, 64, \dots\}$. Объединение $P \cup Q$ — это множество тех целых чисел, которые являются или четными, или квадратами: $\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, \dots\}$. Наконец, дополнение \bar{P} — это множество всех нечетных чисел: $\{1, 3, 5, \dots\}$.

Как мы уже видели, обсуждая понятие одноместного предиката, всякий предикат $P(x)$, определенный на некотором множестве M , взаимно однозначно соответствует некоторому подмножеству P в M , а именно, *характеристическому* подмножеству всех объектов a из M , для которых $P(a)$ имеет значение *и*.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два предиката на M , P и Q — их характеристические множества. Тогда по определению конъюнкции, дизъюнкции и отрицания предикатов характеристическим множеством $P(x) \wedge Q(x)$ является пересечение $P \cap Q$, характеристическим множеством $P(x) \vee Q(x)$ — объединение $P \cup Q$, а характеристическим множеством $\neg P(x)$ — дополнение \bar{P} множества P .

Таким образом, булевым операциям над одноместными предикатами взаимно однозначно соответствуют операции пересечения, объединения и дополнения над множествами. Это теоретико-множественное представление булевых операций над предикатами играет немаловажную роль как для логики, так и для математики. Несколько

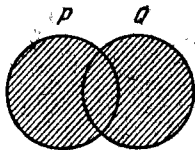


Рис. 12.

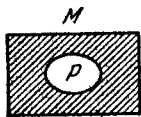


Рис. 13.

позже мы увидим, как в рамках этой взаимосвязи укладывается классическая аристотелевская теория силлогизмов.

Операции логики высказываний над *многоместными* предикатами определяются вполне аналогично. Нужно только следить за тем, какие переменные обозначены одинаковыми буквами, а какие различными. Мы не будем давать общего определения. Приведем только несколько примеров, на основании которых читатель легко уяснит себе, как следует поступать в любом случае.

Имеем, скажем, два двуместных предиката $P(x, y)$ и $Q(y, z)$, определенных на множестве M . $P(x, y) \wedge Q(y, z)$ — это трехместный предикат $R(x, y, z)$ от x, y, z на M . Как увидеть, для каких значений переменных x, y, z $R(x, y, z) \equiv P(x, y) \wedge Q(y, z)$ принимает значение u , а для каких $л$? Пусть a, b, c — три объекта из M . Значение истинности $R(a, b, c)$ для $x = a, y = b, z = c$ получается так:

$$R(a, b, c) \equiv P(a, b) \wedge Q(b, c).$$

$P(a, b)$ и $Q(b, c)$ имеют вполне определенные значения истинности. $R(a, b, c)$ имеет значение u тогда и только тогда, если $P(a, b)$ и $Q(b, c)$ оба имеют значение u .

Если $P(x)$ и $Q(x)$ — два одноместных предиката, то не следует смешивать предикаты $P(x) \vee Q(x)$ и $P(x) \vee Q(y)$. $P(x) \vee Q(x)$, как нам уже известно, одноместный предикат. Напротив, $P(x) \vee Q(y)$ — двуместный предикат от переменных x, y :

$$R(x, y) \equiv P(x) \vee Q(y).$$

$R(a, b)$ имеет значение u в точности тогда, когда $P(a) \vee Q(b)$ имеет значение u ¹⁾.

¹⁾ Разница здесь, конечно, не просто в обозначениях переменных, а в том, что в $P(x) \vee Q(y)$ имеются *две различные* переменные: вместо них независимо друг от друга можно подставлять наименования *двух* конкретных объектов. $P(y) \vee Q(y)$ — тот же самый предикат, что и $P(x) \vee Q(x)$, так же как и $P(x) \vee Q(y)$ — это тот же самый предикат, что и, скажем, $P(u) \vee Q(v)$. Важно только, как мы уже сказали, какие переменные обозначаются одинаковыми, а какие различными буквами. В остальном же эти буквы могут быть произвольными.

§ 3. Кванторы

В логике предикатов наряду с операциями логики высказываний основную роль играют операции, называемые *кванторами*. Именно употребление кванторов делает логику предикатов значительно более богатой, чем логика высказываний.

В § 1 этой главы мы видели, что подстановка объекта a из M в некоторый предикат $P(x)$, определенный на M , превращает $P(x)$ в высказывание $P(a)$. (Напомним: если $\text{Гр}(x)$ — свойство «быть греком», а a — имя некоторого человека, например a — «Сократ», то $\text{Гр}(a)$ — это высказывание «Сократ есть грек».) Будем такие высказывания называть *единичными высказываниями*. Наряду с образованием единичных высказываний из предикатов в логике предикатов рассматриваются две другие операции, превращающие одноместный предикат $P(a)$ в высказывание. Эти операции соответствуют по смыслу тому, что на обыкновенном языке — мы, конечно, пользуемся русским языком — выражается словами «все» и «существует».

Понятие, обозначаемое словом «все», лежит в основе *квантора всеобщности*. Если опять $\text{Гр}(x)$ соответствует предикату « x есть грек», определенному на множестве M всех людей, то из этого предиката с помощью слова «все» мы можем построить высказывание «Все люди — греки» (это, конечно, ложное высказывание). Это — пример применения квантора всеобщности.

Вообще же квантор всеобщности определяется так. Пусть $P(x)$ — какой-нибудь предикат. Тогда квантор всеобщности — это операция, которая сопоставляет $P(x)$ высказывание

«Все x обладают свойством $P(x)$ ». (*)

Для этой операции «все» употребляется знак \forall (перевернутое латинское A , напоминающее о немецком слове «alle» — все).

Высказывание (*) записывается так:

$$\forall x P(x)$$

(и читается: «Для всех x P от x »). В соответствии со смыслом слова «все» $\forall x P(x)$ — ложное высказывание, кроме того единственного случая, когда $P(x)$ — тождественно истинный предикат.

Если множество M состоит только из конечного числа объектов, например из пяти: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , то высказывание $\forall x P(x)$ легко записывается в виде конъюнкции единичных высказываний. Действительно, в приведенном примере множества из пяти объектов оно означает, что $P(a_1) = u, P(a_2) = u, P(a_3) = u, P(a_4) = u, P(a_5) = u$. Таким образом, в этом случае $\forall x P(x)$ равносильно высказыванию

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge P(a_4) \wedge P(a_5).$$

Если, напротив, M — бесконечное множество (например, M — множество всех натуральных чисел), то, поскольку конъюнкция бесконечного числа высказываний не определена, $\forall x P(x)$ не может подобным образом быть сведено к конъюнкции единичных высказываний. $\forall x P(x)$ — высказывание совершенно нового вида. Тем не менее для многих целей удобно мыслить себе, что квантор всеобщности \forall является обобщением конъюнкции единичных высказываний $P(a)$, когда a пробегает все — возможно бесконечное — множество M . «Все натуральные числа обладают некоторым свойством $P(x)$ » мы понимаем, как «1 обладает свойством $P(x)$ », «2 обладает свойством $P(x)$ », «3 обладает свойством $P(x)$ », ... и т. д. (Вот именно: где-то мы должны прекратить перечисление и воспользоваться выражением «и т. д.». Как раз это обстоятельство и мешает нам рассматривать высказывание $\forall x P(x)$ «все натуральные числа обладают свойством $P(x)$ » как конъюнкцию единичных высказываний.)¹⁾

Наряду с квантором всеобщности в логике предикатов рассматривается другой квантор, двойственный квантору всеобщности, — *квантор существования*, обозначаемый знаком \exists (это перевернутая латинская буква E, напоми-

¹⁾ Некоторые логики считают, что и в случае конечного множества M $\forall x P(x)$ имеет не совсем тот же смысл, что и конъюнкция высказываний $P(a)$ для всех a из M . А именно, $\forall x P(x)$ дает большую информацию, чем конъюнкция всех единичных высказываний, указывая еще на то, что объекты a действительно исчерпывают всю область определения предиката. Таким образом, для случая M , состоящего из объектов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , $\forall x P(x)$ равносильно, по их мнению, примеру такому высказыванию: « $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge P(a_4) \wedge P(a_5)$, и других объектов множество определения предиката $P(x)$ не содержит». Такая точка зрения нам кажется вполне разумной.

нающая немецкое слово «existieren» — существовать).

$$\exists x P(x)$$

(читается «существует такое x , что P от x ») — высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда $P(a)$ истинно по меньшей мере для одного объекта a из области определения M . Тем самым $\exists x P(x)$ — истинное высказывание для всех предикатов $P(x)$, кроме одного — тождественно ложного.

Опять-таки, если M — конечное множество (например, $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$), то значение истинности высказывания $\exists x P(x)$ совпадает со значением истинности дизъюнкции всех единичных высказываний $P(a)$ для всех a из M . Так, в нашем примере имеем

$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee P(a_4) \vee P(a_5).$$

Квантор существования обобщает операцию дизъюнкции в том же смысле, в каком квантор всеобщности обобщает операцию конъюнкции.

Между кванторами \forall и \exists имеют место отношения, обобщающие законы де Моргана и позволяющие сводить один из этих кванторов к другому:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \quad (1)$$

(«Неверно, что все x обладают свойством $P(x)$ » равносильно «Существует такой объект x , для которого истинно не $P(x)$ »).

Аналогично имеет место двойственный закон де Моргана

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad (2)$$

(«Неверно, что существует x , обладающее свойством $P(x)$ » равносильно «Все x обладают свойством не $P(x)$ »).

Несмотря на то, что в записях формул $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ встречается буква x , обозначающая переменную, обе эти формулы обозначают высказывания, а не формы высказывания: они от переменной x больше не зависят. Принято говорить, что в формулах $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ кванторы \forall и \exists связывают переменную x . Связанная переменная больше уже переменной не является; ее присутствие в формуле необходимо исключительно для того,

чтобы указать, из какого предиката данное высказывание произошло¹⁾).

Если теперь припомнить взаимосвязь между операциями над одноместными операциями, с одной стороны, и элементарными теоретико-множественными операциями с другой, о которой мы говорили в предшествующем параграфе, то нетрудно видеть, что с помощью кванторов мы имеем возможность выражать ряд важных отношений между множествами.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два предиката, определенных на некотором универсуме M , P и Q — соответствующие характеристические множества. Высказывание

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

означает, что $P(a) \rightarrow Q(a)$ — истинное высказывание для всех a из M . В силу определения импликации $P(a) \rightarrow Q(a)$ истинно в том и только в том случае, если $P(a)$ ложно или $Q(a)$ истинно. Пусть a принадлежит P , тогда $P(a)$ истинно, и так как $P(a) \rightarrow Q(a)$ истинно для любого a , то отсюда следует, что $Q(a)$ истинно, т. е. $a \in Q$. Всякий элемент a , принадлежащий P , принадлежит также Q , т. е. множество P содержится в множестве Q . (Это обозначается так: $P \subset Q$.)

Если, наоборот, $P \subset Q$, то $P(a) \rightarrow Q(a)$ истинно для всех a из M и, следовательно, истинно высказывание $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$. Действительно, если $a \in P$, то a также принадлежит Q , т. е. и антецедент $P(a)$ и консеквент $Q(a)$ истинны, и тем самым истинна импликация $P(a) \rightarrow Q(a)$. Если же a не принадлежит P , то $P(a)$ ложно, и импликация $P(a) \rightarrow Q(a)$ истинна.

Таким образом, высказывание $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ утверждает, что множество P содержится в множестве Q .

¹⁾ Следует отметить, что связанные переменные употребляются в математике и вне математической логики. Самый распространенный пример — это определенный интеграл: $\int_a^b f(x) dx$. Определенный интеграл — число; оно от x не зависит. Функция $f(x)$ зависит от x . Операцией взятия определенного интеграла эта переменная связывается и остается в записи только для того, чтобы указать на происхождение числа из функции $f(x)$. Связывание переменных кванторами — совершенно аналогичное явление.

или, что то же самое, что все объекты, обладающие свойством $P(x)$, обладают также свойством $Q(x)$ ¹⁾.

С помощью квантора существования легко выражается суждение типа «Некоторые P суть Q » (например, «Некоторые англичане — курящие», «Некоторые нечетные числа — простые» и т. д.). «Некоторые P суть Q » следует понимать как то, что по крайней мере один объект x , обладающий свойством P , обладает также свойством Q . Этот факт записывается формулой $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ («существует такое x , что P от x и Q от x »). Эта формула утверждает также, что пересечение характеристических множеств P и Q предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ непусто.

Аналогично с помощью кванторов записывается ряд других отношений между одноместными предикатами.

Гораздо более богатые возможности открывает применение кванторов к многоместным предикатам. Остановимся вкратце на обсуждении этого вопроса.

Пусть $A(x, y)$ — некоторый двуместный предикат, определенный на некотором множестве M . Квантор всеобщности и квантор существования можно применять к нему как для переменной x , так и для переменной y : $\forall x A(x, y)$; $\forall y A(x, y)$; $\exists x A(x, y)$; $\exists y A(x, y)$. Переменная, к которой был применен квантор, называется *связанной*, другая переменная — *свободной*. Все четыре приведенные выражения являются записями одноместных предикатов от соответствующей свободной переменной.

$\forall x A(x, y)$ (читается «для всех x , A от x и y ») — одноместный предикат от переменной y : $\forall x A(x, y) = F(y)$. Он истинен в точности для тех $b \in M$, для которых одноместный предикат $A(x, b)$ истинен для всех x . Если представить предикат $A(x, y)$ его таблицей, то предикат $F(y) = \forall x A(x, y)$ истинен для тех b , для которых столбец с входом b содержит исключительно букву *и*. (На нижеследующей таблице мы приводим пример предиката, определенного на множестве M из пяти элементов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , и таблицы одноместных предикатов, получающихся из него применением кванторов.)

Подобным же образом $\forall y A(x, y) = C(x)$ — предикат от x . Он истинен для тех $a \in M$, для которых строка

¹⁾ Выражение вида $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ называется иногда *формальной импликацией*.

с входом a содержит только букву u . Предикат $\exists x A(x, y) = H(y)$ истинен для тех $a \in M$, для которых соответствующий столбец содержит по меньшей мере один раз букву u , а предикат $\exists y A(x, y)$ истинен для тех $a \in M$, для которых в соответствующей строке встречается буква u .

$A(x, y)$

а)

X \ Y					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	u	u	l	u	l
a_2	l	u	l	u	l
a_3	u	u	l	u	u
a_4	l	u	l	u	u
a_5	u	u	l	u	u

б)

y	$\forall x A(x, y)$
a_1	l
a_2	u
a_3	l
a_4	u
a_5	l

в)

y	$\exists x A(x, y)$
a_1	u
a_2	u
a_3	l
a_4	u
a_5	u

г)

x	$\forall y A(x, y)$
a_1	l
a_2	l
a_3	l
a_4	l
a_5	l

д)

x	$\exists y A(x, y)$
a_1	u
a_2	u
a_3	u
a_4	u
a_5	u

$$\begin{aligned} \forall x \forall y A(x, y) &\equiv \forall y \forall x A(x, y) = l; \\ \exists x \exists y A(x, y) &\equiv \exists x \exists y A(x, y) = u; \\ \forall y \forall x A(x, y) &= u; \exists x \forall y A(x, y) = l; \\ \forall y \exists x A(x, y) &= l; \exists x \exists y A(x, y) = u. \end{aligned}$$

Во всех случаях применение квантора по одной из переменных двуместного предиката превращает его в одноместный.

В случае трехместных предикатов применение квантора приводит к двуместному предикату. Аналогично и для предикатов с большим числом мест применение квантора превращает n -местный предикат в $(n-1)$ -мест-

ный. Более подробно мы на этом останавливаться не будем.

К свободной переменной x одноместного предиката $\forall y A(x, y)$ в свою очередь можно применять квантор всеобщности или квантор существования. Получаются выражения

$$\forall x (\forall y A(x, y)); \quad \exists x (\forall y A(x, y)),$$

которые, опуская скобки, принято записывать соответственно

$$\forall x \forall y A(x, y); \quad \exists x \forall y A(x, y).$$

Это уже высказывания. Первое истинно, если все строки, а тем самым и вся таблица предиката, содержат только букву u , второе истинно, если соответствующая матрица содержит по меньшей мере одну тождественно истинную строку. Три другие предиката $\forall x A(x, y); \exists y A(x, y); \exists x A(x, y)$ также допускают квантификацию, так что в общей сложности мы получаем из одного предиката восемь формально различных высказываний: $\forall x \forall y A(x, y); \exists x \forall y A(x, y); \forall x \exists y A(x, y); \exists x \exists y A(x, y); \forall y \forall x A(x, y); \forall y \exists x A(x, y); \exists y \forall x A(x, y); \exists y \exists x A(x, y)$. Нетрудно убедиться в том, что четыре высказывания, содержащие одинаковые кванторы, попарно эквивалентны:

$$\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$$

и

$$\exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y).$$

$\forall x \forall y A(x, y)$ так же, как и $\forall y \forall x A(x, y)$, истинно тогда и только тогда, когда $A(x, y)$ — тождественно истинный предикат, $\exists x \exists y A(x, y)$ и $\exists y \exists x A(x, y)$ оба истинны во всех случаях, кроме того, когда $A(x, y)$ — тождественно ложный предикат. Все остальные высказывания существенно различны, что нетрудно показать на примерах. Особенно следует помнить, что порядок следования разноименных кванторов существен. Высказывания $\forall x \exists y A(x, y)$ и $\exists y \forall x A(x, y)$, вообще говоря, не эквивалентны. В табличном представлении предиката $A(x, y)$ истинность первого высказывания означает, что во всякой строке встречается по меньшей мере один раз буква u (на произвольном месте), между тем как второе высказывание истинно тогда и только тогда, когда имеется по меньшей мере один столбец, заполненный буквами u . Как

видно, если выполняется второе требование, то автоматически выполняется и первое. Таким образом, если $\exists y \forall x A(x, y)$ истинно, то истинно также $\forall x \exists y A(x, y)$. Следовательно, каков бы ни был предикат $A(x, y)$, имеет место импликация

$$\exists y \forall x A(x, y) \rightarrow \forall x \exists y A(x, y),$$

но обратная импликация, вообще говоря, не имеет места. Пусть, например, $A(x, y)$ — предикат, определенный на множестве из двух элементов a_1, a_2 таблицей

$x \backslash y$	a_1	a_2
a_1	л	и
a_2	и	л

Тогда, очевидно, $\forall x \exists y A(x, y)$ имеет значение и, а $\exists y \forall x A(x, y)$ значение л.

Приведем еще один пример. Пусть $A(x, y)$ — рассмотренный уже нами предикат Дел(x, y), определенный на множестве натуральных чисел и означающий « x делит y ». Тогда утверждение $\forall x \exists y$ Дел(x, y): «для всякого x существует такое y , что x делит y » очевидно, истинно, между тем как $\exists y \forall x$ Дел(x, y) «существует такое y , что любое x делит y » ложно.

§ 4. Преобразования формул логики предикатов. Предваренная нормальная форма

В основе логики предикатов лежит ряд законов для преобразования формул, содержащих предикаты, операции логики высказываний и кванторы. Мы приведем некоторые из них в виде примеров. Часть из этих законов нам понадобится в дальнейшем. Мы при этом не будем стремиться обозреть всю совокупность преобразований и не будем стараться проводить строгие доказательства. Напоминаем в связи с этим, что предлагаемая книга не является учебником математической логики.

Ряд основных законов преобразования выражений логики предикатов относится к возможности вынесения

кванторов за скобки. Здесь следует запомнить следующие равносильности:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)), \quad (1)$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)). \quad (2)$$

При этом равносильность (знак \equiv) в логике предикатов естественно понимается так: для любого множества M и для любых предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на M , выражения в левой и в правой частях имеют одно и то же значение истинности (т. е. одновременно истинны или одновременно ложны).

Простое содержательное рассуждение показывает истинность равносильностей (1) и (2). Действительно, левая часть (1) принимает значение и в том и только в том случае, если и $A(x)$, и $B(x)$ истинны для всех $x \in M$, т. е. если оба предиката тождественно истинны. Но в этом и только в этом случае также и конъюнкция $A(x) \wedge B(x)$ будет тождественно истинным предикатом, и тем самым будет истинным высказывание $\forall x (A(x) \wedge B(x))$. Аналогично доказывается вторая равносильность. Но мы не будем проводить это рассуждение, а приведем две равносильности, позволяющие сводить квантор существования к квантору всеобщности и обратно:

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \quad (3)$$

$$\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x). \quad (4)$$

Равносильность (3) означает: если неверно, что существует некоторый элемент, для которого истинно $A(x)$, то для всех элементов истинно $\neg A(x)$ и наоборот. Равносильность (4) означает: если неверно, что для всех элементов множества M истинно $A(x)$, то существует такой элемент, для которого истинно $\neg A(x)$. Очевидно, эти утверждения соответствуют как раз пониманию выражений «для всех» и «существует такой, что».

Равносильности (3) и (4) являются обобщениями законов де Моргана, к которым они сводятся в случае конечных множеств M . Мы их будем называть законами де Моргана для кванторов. Применяя отрицание к обеим частям (3) и (4) и учитывая, что двойное отрицание высказывания равносильно ему самому, имеем равносильности

$$\exists x A(x) \equiv \neg \forall x \neg A(x), \quad (3')$$

$$\forall x A(x) \equiv \neg \exists x \neg A(x), \quad (4')$$

которые позволяют выражать квантор существования через квантор всеобщности и наоборот.

С помощью равносильностей (3') и (4') равносильность (2) легко выводится из равносильности (1). Действительно, заменяя в левой части (2) кванторы существования на кванторы всеобщности, получаем

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \neg \forall x \neg A(x) \vee \neg \forall x \neg B(x);$$

согласно правилу де Моргана последнее выражение равносильно

$$\neg (\forall x \neg A(x) \wedge \forall x \neg B(x));$$

последнее ввиду (1) равносильно

$$\neg \forall x (\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \equiv \neg \forall x \neg (A(x) \vee B(x)),$$

а последняя формула согласно (4) равносильна $\exists x (A(x) \vee B(x))$. Итак, имеем окончательно $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$.

Следует заметить, что квантор всеобщности нельзя выносить за скобки, если выражения объединены знаком дизъюнкции: формулы $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ и $\forall x (A(x) \vee B(x))$ не равносильны. Действительно, первая формула утверждает, что один из предикатов $A(x)$ или $B(x)$ тождественно истинен, между тем как вторая формула означает, что дизъюнкция предикатов $A(x)$ и $B(x)$ тождественно истинна. Но легко указать примеры двух не тождественно истинных предикатов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Для таких предикатов вторая формула будет истинна, а первая ложна. С другой стороны, если первая формула истинна, то, очевидно, истинна и вторая. Таким образом, мы можем сказать, что вторая формула является логическим следствием первой:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)).$$

Аналогично, как читатель может легко убедиться, истинна формула

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x),$$

но знак импликации нельзя заменить знаком равносильности.

И все-таки имеется возможность в несколько иной форме выносить квантор всеобщности и квантор существования за скобки и в этих случаях. А именно, имеют место

следующие равносильности:

$$\forall x A(x) \vee C \equiv \forall x (A(x) \vee C), \quad (5)$$

$$\exists x A(x) \wedge C \equiv \exists x (A(x) \wedge C). \quad (6)$$

Здесь C обозначает выражение, не зависящее от x . (Это выражение может быть либо высказыванием, либо предикатом от переменных, не содержащих x .)

Истинность этих равносильностей уяснить себе нетрудно. Левая часть (5) принимает значение u в том и только в том случае, если или $A(x)$ истинно для всех x , или же если C истинно. Если по крайней мере одно из этих обстоятельств имеет место, то $A(x) \vee C$ будет иметь значение u для всех x , т. е. истинно высказывание $\forall x (A(x) \vee C)$. Предположим наоборот, что $\forall x (A(x) \vee C)$ имеет значение u . Если при этом $C = u$, то и левая часть имеет значение u . Если же $C \neq u$, то формула $\forall x (A(x) \vee C)$ может быть истинной только в том случае, когда $A(x)$ принимает значение u для всех x . Левая часть принимает при этом опять значение u . Аналогично доказывается (6).

Заметим теперь, что обозначение переменной в предикате $A(x)$ произвольно и что $\forall x A(x)$ и $\forall y A(y)$ — равносильные высказывания. Следовательно, согласно равносильности (5) мы можем утверждать следующую цепочку равносильностей:

$$\begin{aligned} \forall x A(x) \vee \forall x B(x) &\equiv \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv \\ &\equiv \forall x (A(x) \vee \forall y B(y)) \equiv \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)), \end{aligned}$$

т. е. имеет место равносильность

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)) \quad (7)$$

и аналогично выводится равносильность

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)). \quad (8)$$

Равносильности (7) и (8), как мы видим, позволяют в несколько иной форме выносить кванторы за скобки.

Приведенные равносильности позволяют любым выражениям логики предикатов сопоставлять равносильные формулы некоторого стандартного вида, так называемые *предваренные нормальные формы*. Этим термином обозначают формулы, у которых все кванторы вынесены вперед. Более точно, формулы в предваренной нормальной форме

имеют вид

$$\mathbf{X}_1 x_1 \mathbf{X}_2 x_2 \dots \mathbf{X}_r x_r \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

где $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r$ могут быть как кванторами всеобщности, так и кванторами существования, а $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ — выражение, состоящее из предикатов от переменных x_1, x_2, \dots, x_r (они могут содержать, кроме того, и другие переменные), связанных между собой только знаками операций логики высказываний.

Мы не будем доказывать в общем виде теорему о том, что для всякого выражения логики предикатов существует равносильное ему выражение в предваренной нормальной форме, а поясним это утверждение на одном примере. Пусть дана формула

$$\exists x \forall y A(x, y) \vee \neg \forall x \exists y B(x, y).$$

Сначала с помощью законов де Моргана можно вынести кванторы за знак отрицания:

$$\begin{aligned} \exists x \forall y A(x, y) \vee \neg \forall x \exists y B(x, y) &\equiv \\ &\equiv \exists x \forall y A(x, y) \vee \exists x \forall y \neg B(x, y). \end{aligned}$$

Теперь согласно (2) можно вынести квантор существования за скобку:

$$\begin{aligned} \exists x \forall y A(x, y) \vee \exists x \forall y \neg B(x, y) &= \\ = \exists x (\forall y A(x, y) \vee \forall y \neg B(x, y)). \end{aligned}$$

Для того чтобы вынести кванторы всеобщности, нужно предварительно переименовать переменные:

$$\begin{aligned} \exists x (\forall y A(x, y) \vee \forall y \neg B(x, y)) &\equiv \\ &\equiv \exists x (\forall y A(x, y) \vee \forall z \neg B(x, z)) \equiv \\ &\equiv \exists x \forall y (A(x, y) \vee \forall z \neg B(x, z)) \equiv \\ &\equiv \exists x \forall y \forall z (A(x, y) \vee \neg B(x, z)). \end{aligned}$$

Последняя формула уже имеет предваренную нормальную форму.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \exists x \forall y A(x, y) \vee \neg \forall x \exists y B(x, y) &\equiv \\ &\equiv \exists x \forall y \forall z (A(x, y) \vee \neg B(x, z)). \end{aligned}$$

Аналогично поступают и в общем случае.

§ 5. Суждения и силлогизмы

В настоящем параграфе мы хотим показать, как в рамках современной логики предикатов описывается аристотелевская теория суждений и силлогизмов, или, как мы будем называть ее, аристотелевская силлогистика. Эта теория имеет огромное историческое значение, так как она явилась первым примером строго построенной формально-логической системы. В течение двух тысячелетий — вплоть до возникновения математической логики — она была по существу и единственным разделом формальной логики. Еще на рубеже XIX в. немецкий философ И. Кант считал, что все существенное, что вообще может быть сказано о законах формальной логики, уже было сказано Аристотелем и что тем самым формальная логика в некотором смысле мертвая, неразвивающаяся наука. Правда, нужно отметить, что логические исследования Аристотеля и его последователей не исчерпываются теорией категорических суждений и силлогизмов. Им и его учеником Теофрастом были заложены основы теории так называемых модальных суждений и силлогизмов. Но этот раздел логики до сих пор не достиг той степени законченности и строгости, которая характеризует теорию категорических суждений и силлогизмов¹⁾.

Возникновение и бурное развитие математической логики, начавшееся с середины прошлого столетия, полностью опровергло такое пессимистическое мнение, выдвинув новую широкую проблематику для логических исследований. Сегодня без преувеличения можно сказать, что мы находимся не на конечном этапе, а в начале широкого развития исследований формальных законов логики. Но даже в уже хорошо разработанной части математической логики аристотелевская силлогистика представляет собой небольшую и довольно элементарную часть, относящуюся к логике предикатов и — более точно — к логике одноместных предикатов. Тем не менее и сегодня многие специалисты логики все вновь и вновь возвращаются к критическому разбору классического наследия формальной логики, заложенной Аристотелем, и к выяснению того, какое место оно занимает в современной логике. Такие

¹⁾ О модальной логике и важнейших результатах в этой области можно прочитать в статье «Модальная логика», напечатанной в III томе «Философской энциклопедии».

исследования несомненно важны для понимания исторического развития формальной логики.

Наша задача более скромна. Теорию категорических суждений и силлогизмов мы рассмотрим как пример применения понятий логики предикатов. Для более детального знакомства с этим разделом мы отсылаем читателя к обширной литературе по этому вопросу¹⁾. Нужно сразу же подчеркнуть, что та логическая система, которую мы называем аристотелевской силлогистикой, в той форме, как мы ее будем излагать, в действительности не содержится в трудах Аристотеля. Современная форма аристотелевской силлогистики является результатом работы многочисленных комментаторов и последователей Аристотеля: древнегреческих, древнеримских, арабских и средневековых логиков. Силлогистика Аристотеля зачастую называется просто *традиционной формальной логикой* и противопоставляется современной формальной логике, возникшей в XIX в. и базирующейся на математических методах. Нужно отметить, что вплоть до XVII—XVIII вв. знание традиционной формальной логики считалось неотъемлемой частью всякого образования и занимало в нем примерно то же место, какое сегодня занимает элементарная математика. В дальнейшем традиционная логика стала отступать на задний план, уступая свое место естественным наукам и математике.

В аристотелевской логике рассматривалось четыре вида так называемых *категорических суждений*:

1. «Все S суть P » — *общеутвердительное суждение*.
2. «Никакое S не есть P » — *общеотрицательное суждение*.
3. «Некоторые S суть P » — *частноутвердительное суждение*.
4. «Некоторые S не суть P » — *частноотрицательное суждение*.

Согласно давно установившейся традиции принято эти четыре типа суждений обозначать заглавными латинскими буквами:

A — общеутвердительное суждение,

E — общеотрицательное суждение,

¹⁾ Читателям, более подробно интересующимся этими вопросами, рекомендуется обратиться к книге: Я. Лукасевич, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, ИЛ, 1959.

I — частноутвердительное суждение,

O — частноотрицательное суждение.

Суждения делили, во-первых, «по качеству»: 1) *A*, *I* — утвердительные суждения, 2) *E*, *O* — отрицательные суждения; во-вторых, «по количеству»: 1) *A*, *E* — общие суждения, 2) *I*, *O* — частные суждения.

Рассмотрим все четыре типа суждений несколько более подробно.

Общеправительное суждение: «Все *S* суть *P*».

Примерами могут служить следующие суждения: «Все рыбы — животные», «Все люди смертны», «Все квадраты — прямоугольники» и т. д.

Смысл суждения «Все *S* суть *P*» состоит в том, что некоторый класс объектов *S* содержится в некотором классе объектов *P*: класс всех рыб содержится в классе всех животных, класс всех людей содержится в классе всех смертных существ, класс всех квадратов содержится в классе всех прямоугольников и т. д. Объекты классов *S* и *P* называются терминами суждения. В первом суждении терминами будут «рыбы» и «животные», во втором — «люди» и «смертные (существа)», в третьем — «квадраты» и «прямоугольники».

Суждение «Все *S* суть *P*» — форма высказываний, а *S* и *P* — переменные, вместо которых нужно подставить конкретные термины («рыбы», «животные» и т. д.) для того, чтобы получилось высказывание — истинное или ложное. Но, как мы уже знаем, классы объектов однозначно соответствуют одноместным предикатам, определенным на совокупности всех объектов. Класс «рыб» соответствует предикату-свойству «быть рыбой», а класс «животных» — предикату «быть животным». Утверждение «Все *S* суть *P*» в терминах предикатов естественно понимать так:

Как только некоторый объект *x* обладает свойством *S* (т. е. *S* (*x*) истинно), то он также обладает свойством *P* (т. е. *P* (*x*) истинно). Это утверждение записывается с использованием квантора всеобщности, очевидно, так:

$$\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$$

(«Для всех *x*, если *x* обладает свойством *S*, то *x* обладает свойством *P*»).

Обсуждение трех остальных типов суждений мы можем провести более кратко, так как большинство соображений вполне аналогично уже рассмотренному случаю общепутвердительных суждений.

Общепутрицательное суждение: «Никакое S не есть P ».

Примерами могут служить суждения: «Никакие рыбы не являются птицами», «Никакие камни не являются животными», «Никакие треугольники не являются квадратами» и т. д.

Смысл общепутрицательного суждения такой: если некоторый объект x обладает свойством S (т. е. если $S(x)$ истинно), то он не обладает свойством P (т. е. $P(x)$ ложно). Это записывается следующим образом:

$$\forall x (S(x) \rightarrow \neg P(x)).$$

Частнопутвердительное суждение: «Некоторые S суть P ».

Примерами являются следующие суждения: «Некоторые люди курящие», «Некоторые швейцарцы говорят по-французски» (т. е. «Некоторые швейцарцы суть говорящие по-французский»), «Некоторые простые числа четны» и т. д. Из анализа употребления частнопутвердительных суждений в традиционной формальной логике видно, что слово «некоторые» в них следует понимать как «по меньшей мере один». В этом смысле суждение «некоторые простые числа четные» — истинно, так как одно простое число, а именно 2, четно. Частнопутвердительному суждению «Некоторые S суть P » соответствует следующая формула:

$$\exists x (S(x) \wedge P(x))$$

(«Существует такой объект x , обладающий свойством S , который также обладает свойством P »).

Частнопутрицательное суждение: «Некоторые S не суть P ».

Примерами являются следующие суждения: «Некоторые животные не дышат легкими», «Некоторые грибы несъедобны», «Некоторые треугольники не равнобедренны» и т. д.

Это суждение записывается так:

$$\exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$$

(«Существует такой объект x , который обладает свойством S и не обладает свойством P »).

С помощью известных нам правил преобразования кванторов полезно преобразовать запись общих суждений так, чтобы в них вместо квантора всеобщности участвовал квантор существования. Аналогично частноутвердительные суждения можно записать с квантором всеобщности. Например, для общеутвердительного суждения

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \equiv \neg \exists x \neg (A(x) \vee B(x)) \equiv \neg \exists x (A(x) \wedge \neg B(x)).$$

Итак, мы имеем следующие выражения категорических суждений в логике предикатов:

- 1) $A: \forall x (S(x) \rightarrow P(x)) \equiv \neg \exists x (S(x) \wedge \neg P(x));$
- 2) $E: \forall x (S(x) \rightarrow \neg P(x)) \equiv \neg \exists x (S(x) \wedge P(x));$
- 3) $I: \neg \forall x (S(x) \rightarrow \neg P(x)) \equiv \exists x (S(x) \wedge P(x));$
- 4) $O: \neg \forall x (S(x) \rightarrow P(x)) \equiv \exists x (S(x) \wedge \neg P(x)).$

Из этих записей непосредственно усматривается ряд отношений между суждениями. Эти отношения подробно изучались в традиционной логике.

З а к о н ы о т р и ц а н и я. Суждения A и O , а также суждения E и I являются отрицаниями друг друга. Как говорилось, они находятся в отношении противоречия друг к другу.

Из перестановочности операции конъюнкции следует, что суждения E и I допускают обращение.

З а к о н ы о б р а щ е н и я:

$$\neg \exists x (S(x) \wedge P(x)) \equiv \neg \exists x (P(x) \wedge S(x))$$

(«Никакое S не есть P » истинно тогда и только тогда, когда истинно «Никакое P не есть S ») и

$$\exists x (S(x) \wedge P(x)) \equiv \exists x (P(x) \wedge S(x))$$

(«Некоторые S суть P » истинно тогда и только тогда, когда истинно «Некоторые P суть S »).

Нужно сказать, что в традиционной логике суждений устанавливался ряд других отношений между суждениями, имеющих вид импликаций или, точнее, вид логических следований. А именно:

а) если «Все S суть P » истинно, то «Некоторые S суть P » истинно;

б) если «Никакое S не есть P » истинно, то «Некоторые S не суть P » истинно;

в) если «Все S суть P » истинно, то «Никакое S не есть P » ложно;

в') если «Никакое S не есть P » истинно, то «Все S суть P » ложно;

г) если «Некоторые S суть P » ложно, то «Некоторые S не суть P » истинно;

г') если «Некоторые S не суть P » ложно, то «Некоторые S суть P » истинно;

а также следующие законы обращения:

д) если «Все S суть P » истинно, то «Некоторые P суть S » истинно;

д') если «Никакое S не есть P » истинно, то «Некоторые P не суть S » истинно.

Как мы скоро увидим, все эти законы а) — д') для категорических суждений, описанных формулами 1)–4), не имеют места. Не следует, конечно, думать, что Аристотель и его последователи ошибались, когда они утверждали эти законы. Суть дела в том, что традиционное понимание смысла суждений несколько отличалось от того, которое определено формулами 1)–4). А именно, в традиционной логике во всех суждениях неявно предполагалось, что термины всегда соответствуют *непустым классам* объектов или, иначе говоря, предикаты $S(x)$ и $P(x)$ не могут быть тождественно ложными. Поясним это положение на примерах.

Возьмем в качестве S часто употребляемый пример пустого класса «короли Швейцарии». (Нужно, конечно, знать, что Швейцария никогда королей не имела.) Если обозначать через $K(x)$ предикат «быть королем Швейцарии» (а через K — класс «королей Швейцарии»), то $K(x)$ — тождественно ложный предикат (а K — пустой класс). Обозначим через $M(x)$ какой-нибудь осмысленный предикат, например «носить бороду». Тогда в понимании традиционной формальной логики — и, нужно признать, в принятом повседневном употреблении языка — все нижеследующие суждения:

A — «Все короли Швейцарии носили бороду»,

E — «Никакой король Швейцарии не носил бороды»,

I — «Некоторые короли Швейцарии носили бороду»,

O — «Некоторые короли Швейцарии не носили бороды» — воспринимаются как ложные высказывания.

Между тем в той интерпретации суждений на языке логики предикатов, которую мы предложили, оба первых суждения (общие суждения A и E) следует рассматривать как истинные, между тем как оба последних (частные суждения I и O) — как ложные. Действительно, имеем

$$\neg \exists x (K(x) \wedge \neg M(x))$$

(«Не существует такого объекта x , который был бы королем Швейцарии и не носил бороды») истинно, так как королей Швейцарии вообще не было. Аналогично

$$\neg \exists x (K(x) \wedge M(x))$$

(«Не существует такого объекта x , который был бы королем Швейцарии и носил бороду») истинно опять-таки в силу того, что королей Швейцарии не существовало. Итак, в нашем понимании при конкретных предикатах $K(x)$ «быть королем Швейцарии» и $M(x)$ «носить бороду» оба суждения A и E истинны ввиду тождественной ложности предиката $K(x)$. Нетрудно убедиться в том, что для этих конкретных предикатов частные суждения I и O ложны (как и в традиционной логике). Действительно, запись обоих суждений начинается с квантора существования: «Существует такой объект x , что (в первом случае) $S(x)$ и $P(x)$, а (во втором случае) $S(x)$ и не $P(x)$ ». Но это ложные высказывания, так как для данного конкретного термина «короли Швейцарии» уже первый член конъюнкции ложен для всякого объекта x .

Вышеприведенные законы традиционной логики а) — д') для данных терминов не выполняются. Там говорится, например, что если «Все S суть P » истинно, то «Некоторые S суть P » истинно. Но в нашем понимании для рассматриваемых предикатов «Всякое K есть M » истинно, «Некоторое K есть M » ложно и, следовательно, вся импликация ложна.

Подобным же образом ложной оказывается импликация: если «Никакое K не есть M » истинно, то «Некоторые K не суть M » истинно. Здесь опять антецедент истинен, а консеквент ложен.

Рассмотрение дальнейших импликаций а) — д') для случая пустого класса S мы предоставляем читателю.

Не следует думать, что невыполнение законов а) — д') при нашем описании суждений в терминах логики

предикатов свидетельствует о недостатках логики предикатов. В терминах логики предикатов совсем нетрудно выразить категорические суждения так, как их понимали в традиционной логике. Для этого достаточно в формулах 1) — 4) добавить конъюнктивные члены, обеспечивающие существование объектов в классах S и P . Таким образом, мы получаем следующие формулы, более точно передающие смысл суждений так, как его понимали в традиционной логике:

$$1') A: \exists y S(y) \wedge \exists z P(z) \wedge \neg \exists x (S(x) \wedge \neg P(x));$$

$$2') E: \exists y S(y) \wedge \exists z P(z) \wedge \neg \exists x (S(x) \wedge P(x)).$$

Добавление конъюнктивных членов для случая частного утвердительного суждения I излишне, так как квантор существования в формуле 3) уже обеспечивает непустоту обоих классов S и P . Для частного отрицательного суждения O необходимо добавить конъюнктивный член $\exists z P(z)$, чтобы обеспечить непустоту класса P . Итак, мы получаем

$$3') I: \exists x (S(x) \wedge P(x));$$

$$4') O: \exists x (S(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \exists z P(z).$$

Будем называть формулы 1') — 4') *записями категорических суждений в традиционном понимании*. Для них, как нетрудно проверить, действительно выполняются вышеприведенные законы а) — д'). Проверку можно провести или содержательно, или используя законы логики предикатов. Проверим, например, первую импликацию:

$$(\forall x (S(x) \rightarrow P(x)) \wedge \exists y S(y) \wedge \exists z P(z)) \rightarrow \exists t (S(t) \wedge P(t))$$

(если «Все S суть P », то «Некоторые S суть P »). Содержательно можно рассуждать так: $\exists y S(y)$ означает, что класс S не пуст. Пусть u — какой-нибудь объект, выполняющий S (т. е. $S(u)$ истинно), но так как $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$, то $S(u) \rightarrow P(u)$ и, следовательно, $P(u)$ истинно (согласно *modus ponens*). Следовательно, $S(u) \wedge P(u)$ истинно, а, значит, $\exists x (S(x) \wedge P(x))$ истинно, т. е. имеет место I .

Формально можно произвести следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \exists z P(z) \wedge \exists y S(y) \wedge \forall x (S(x) \rightarrow P(x)) &\equiv \\ &\equiv \exists z P(z) \wedge \exists y S(y) \wedge (S(y) \rightarrow P(y)). \end{aligned}$$

Но мы уже видели, что для кванторов имеет место следующая импликация:

$$\exists y \forall x C(x, y) \rightarrow \exists y C(y, y).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \exists z P(z) \wedge \exists y \forall x (S(y) \wedge (S(x) \rightarrow P(x))) &\rightarrow \\ \rightarrow \exists y \forall x (S(y) \wedge (S(x) \rightarrow P(x))) &\rightarrow \\ \rightarrow \exists y (S(y) \wedge (S(y) \rightarrow P(y))) &\rightarrow \exists y (S(y) \wedge (\neg S(y) \vee P(y))) \rightarrow \\ \rightarrow \exists y ((S(y) \wedge \neg S(y)) \vee (S(y) \wedge P(y))) &\rightarrow \exists y (S(y) \wedge P(y)) ^1). \end{aligned}$$

Аналогично можно проверить и другие законы а) — д'). Мы на этом останавливаться не будем.

Остается еще одно несоответствие с законами традиционной логики. Если все суждения с пустым термом считать ложными (например, все суждения относительно «королей Швейцарии»), то оказывается, что суждения *A* и *O*, а также *E* и *I* не всегда являются отрицаниями друг друга. Законы отрицания, которые утверждала традиционная логика, не выполняются. Единственный выход, который напрашивается, состоит в том, что фразы с пустыми термами (вроде «Все короли Швейцарии носили бороду») следует в традиционном понимании считать не ложными, а бессмысленными словосочетаниями и тем самым не относить к суждениям. По-видимому, такой подход лучше всего передает точку зрения традиционной формальной логики. Но нужно сказать, что математическая логика по многим причинам предпочитает не становиться на точку зрения, согласно которой высказывания, в которых могут участвовать пустые классы, исключаются из рассмотрения. В математике особенно целесообразно рассматривать пустые множества наравне с непустыми. Например, в алгебре мы говорим о множестве вещественных корней полиномов с вещественными коэффициентами. Между тем, как хорошо известно, не все полиномы действительно имеют вещественные корни. Тем не менее мы говорим и рассуждаем о совокупности таких корней, вполне

¹⁾ Под $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ мы понимаем формулу $(A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \rightarrow A_n)$. В силу транзитивности импликации (гл. II, § 2) эта формула равносильна $A_1 \rightarrow A_n$. Поэтому в цепочке импликаций мы всегда можем делать заключение от первой формулы к последней. Точно так же можно рассматривать и цепочки эквивалентностей вида $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_n$. (Прим. ред.)

отдавая себе отчет в том, что эта совокупность может оказаться пустой. И это далеко не единственный пример. Все развитие современной математики показывает, что допущение пустого множества в качестве объекта математических рассуждений во многом упрощает математический аппарат. В этом смысле введение пустого множества наравне с непустыми сыграло роль, подобную той, которую в свое время сыграло введение числа нуль для арифметики.

Заметим также, что и в рассуждениях в повседневной жизни более целесообразно не исключать возможность пустоты классов тех объектов, о которых мы говорим. Возьмем, скажем, такое суждение:

«Некоторые люди, не живущие на Земле, носят бороды». Класс A «людей, не живущих на Земле» в настоящее время пуст и по этой причине данное высказывание ложно. Но нам кажется неразумным считать его бессмысленным, особенно на пороге космической эры, когда мы с полным основанием ожидаем, что в скором будущем класс A уже больше не будет пустым.

На этом мы закончим наше обсуждение теории категорических суждений. Условимся, что в дальнейшем при рассмотрении теории силлогизмов мы в соответствии с точкой зрения математической логики не будем исключать из рассмотрения пустые термины. Будем также считать, что категорические суждения A , E , I , O задаются формулами 1)–4) логики предикатов. В связи с этим результаты современной теории силлогизмов несколько отличны от результатов традиционной логики. Впрочем, принимая дополнительно законы а) — д') (т. е. записывая суждения в виде 1')–4')), нетрудно вывести как раз силлогизмы традиционной логики. Мы этого делать не будем, так как они представляют в настоящее время довольно малый интерес.

Перейдем теперь к теории категорических силлогизмов. Рассматривая теорию категорических суждений, мы уже отметили ряд импликаций, которые позволяют из истинности некоторого суждения выводить истинность или ложность некоторого другого суждения. Сюда относятся приведенные нами законы отрицания и законы обращения. Классические силлогизмы представляют собой некоторые правила логических заключений, позволяющих из истинности двух суждений выводить истинность некоторого третьего суждения.

Самым известным примером силлогизма является силлогизм Барбага:

Все M суть P

Все S суть M

следовательно,

Все S суть P

В дальнейшем вместо слова «следовательно» мы будем употреблять горизонтальную черту. Приведенный выше силлогизм запишется при этом так:

Все M суть P

Все S суть M

Все S суть P

(«Все M суть P » и «Все S суть M » называются *посылками* силлогизма, а «Все S суть P » — *заключением*.)

Например,

Все птицы — животные

Все воробьи — птицы

Все воробьи — животные

Значение силлогизма Барбага следующее: если подставить вместо M , P , S конкретные термины (в нашем случае мы подставили термины «птицы», «животные», «воробьи») и если при этом посылки становятся истинными высказываниями, то истинно будет и высказывание-заключение.

Силлогизм Барбага основан на импликации:

Если («Все M суть P » и «Все S суть M »), то («Все S суть P »).

Эта импликация всегда истинна независимо от того, какие термины подставляются вместо переменных M , P , S . Если теперь известно, что антецедент этой импликации (т. е. конъюнкция посылок) истинен, то на основании *modus ponens* можно утверждать истинность консеквента (заключения).

Все другие силлогизмы имеют аналогичное строение. Они основаны на импликациях вида

$$(A \wedge B) \rightarrow C,$$

где A , B , C — категорические суждения, зависящие от трех переменных термов M , P , S . Эти импликации тождественно истинны, в силу чего из истинности конъюнкции

$A \wedge B$ на основании *modus ponens* можно выводить истинность суждения C .

Для более подробного описания силлогизмов мы должны ввести ряд понятий и обозначений.

В суждениях мы первый термин будем называть *подлежащим*, второй — *сказуемым*¹⁾. Это в точности соответствует грамматическому обозначению. Например, в суждении «Все птицы — животные» термин «птицы» — подлежащее, «животные» — сказуемое; в суждении «Некоторые швейцарцы говорят по-французски» = «Некоторые швейцарцы суть говорящие по-французски» термин «швейцарцы» — подлежащее, «говорящие по-французски» — сказуемое. В силлогизмах участвуют три термина S , M , P , называемых S — *малый термин*, M — *средний термин*, P — *большой термин*. Силлогизмы состоят из трех суждений, каждое из которых содержит два из трех терминов M , P , S , две посылки и заключение. Заключение всегда является суждением, в котором S — подлежащее, а P — сказуемое. Посылки являются суждениями, содержащими средний термин M и один из терминов S и P . Посылка с терминами M и P называется *большой посылкой*, с терминами S и M — *малой посылкой*.

Условливаются, что во всяком силлогизме сначала помещается большая посылка, потом малая. Таким образом, общий вид всякого силлогизма следующий:

БОЛЬШАЯ ПОСЫЛКА — суждение, содержащее M и P ;

МАЛАЯ ПОСЫЛКА — суждение, содержащее M и S ;

ЗАКЛЮЧЕНИЕ — суждение, в котором S — подлежащее, P — сказуемое.

Таким образом, в классическом силлогизме некоторое суждение о терминах S и P выводится из двух суждений-посылок, в которых участвует некоторый термин M , не встречающийся в заключении. Силлогистическое правило позволяет исключать общий термин двух суждений.

Суждение с терминами U и V , в котором U — подлежащее, а V — сказуемое, будем сокращенно записывать UV .

¹⁾ В традиционной логике для подлежащего в суждении употребляется слово «субъект», для сказуемого — слово «предикат» (отсюда и буквы S и P). Мы этой терминологией пользоваться не будем, так как слово *предикат* в логике предикатов имеет иной смысл. Для нас оба термина S и P являются одиоместными предикатами.

Во всяком силлогизме заключение должно иметь вид SP , а в посылках порядок следования терминов может быть различным: большая посылка может иметь вид MP или PM , малая — вид SM или MS . В зависимости от порядка следования терминов в посылках совокупность силлогизмов распадается на четыре возможных типа, называемых *фигурами силлогизмов*. К первой фигуре относят силлогизмы, в которых средний термин M — подлежащее в большой и сказуемое в малой посылке; во второй фигуре M — сказуемое в обеих посылках; в третьей фигуре M — подлежащее в обеих посылках; и, наконец, в четвертой фигуре M — сказуемое в большой и подлежащее в малой посылке. Нетрудно видеть, что этим исчерпываются возможные фигуры. Выпишем их все в схематической форме¹⁾:

I фигура	II фигура	III фигура	IV фигура
MP	PM	MP	PM
SM	SM	MS	MS
$\frac{SM}{SP}$	$\frac{SM}{SP}$	$\frac{MS}{SP}$	$\frac{MS}{SP}$

Каждое из суждений вида UV может быть одного из четырех типов: A, E, I, O . Будем их записывать так: UaV — общеутвердительное суждение, UeV — общеотрицательное суждение, UiV — частноутвердительное суждение, UoV — частноотрицательное суждение. В зависимости от того, какой из четырех типов имеет посылки и заключения, каждая фигура распадается на так называемые *модусы*. Всякая фигура силлогизмов содержит три суждения и каждое из этих суждений независимо друг от друга может иметь один из четырех типов: A, E, I, O . Таким образом, для всякой фигуры возможны в общей сложности $4^3 = 64$ модуса, а всех возможных модусов силлогизма, относящихся ко всем четырем фигурам, имеется $4 \cdot 64 = 256$.

К ним относится, например, уже упоминавшийся силлогизм *Barbara*, который является одним из модусов

¹⁾ Может возникнуть вопрос, чем обуславливается фиксирование порядка следования термов в заключении SP . Не возникают ли дальнейшие возможные фигуры, если допустить заключения вида PS ? На основании простых комбинаторных соображений оказывается, что с точностью до обозначения получаются те же самые фигуры. Ведь термины M, P, S вполне произвольны. Если заключение имеет вид PS , то будем считать P — малым, а S — большим термином. Переставляя тогда порядок посылок, мы вновь возвращаемся к уже перечисленным четырем фигурам.

первой фигуры, а именно модусом

$$\begin{array}{c} Ma P \\ Sa M \\ \hline Sa P \end{array}$$

А вообще уже для первой фигуры мыслимы модусы:

$$\begin{array}{c} Ma P \\ Se M \\ \hline Sa P \end{array}; \quad \begin{array}{c} Ma P \\ Si M \\ \hline Sa P \end{array}; \quad \dots; \quad \begin{array}{c} Mi P \\ So M \\ \hline So P \end{array}; \quad \dots \text{ и т. д.}$$

Аналогичные модусы мыслимы для других фигур.

Все, что было сказано до сих пор, относится к выяснению того, какие модусы силлогизмов вообще возможны. Только теперь можно приступить к обсуждению основного вопроса теории силлогизмов о том, какие же из модусов позволяют во всех случаях (т. е. при любых конкретных терминах) из истинных посылок делать истинные заключения. О таких модусах мы будем говорить, что они являются *правильными модусами силлогизмов*. Правильным является, например, модус *Barbara*. Неправильным является, например, модус

$$\begin{array}{c} Ma P \\ Si M \\ \hline Sa P \end{array}$$

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно подыскать для переменных терминов *M*, *P*, *S* такие конкретные термины, для которых обе посылки будут истинными, а заключение ложным. Возьмем, скажем, *M* — «французы», *P* — «европейцы», *S* — «курящие». Обе посылки

Ma P — «Все французы — европейцы»,
Si M — «Некоторые курящие — французы»

истинны, а заключение

Sa P — «Все курящие — европейцы»

ложно (курят не только европейцы). Между тем, как сразу видно, истинным было бы заключение вида *Si P* — «Некоторые курящие — европейцы». А это было бы заключение по модусу

$$\begin{array}{c} Ma P \\ Si M \\ \hline Si P \end{array}$$

который, как оказывается, *всегда* дает из истинных посылок истинное заключение и является поэтому правильным модусом силлогизма, известным под названием Dagii.

Задача теперь состоит в том, чтобы установить все правильные модусы силлогизмов, т. е. для любого из возможных модусов решить, является ли он правильным или нет. При этом нужно дать себе отчет в том, что если для установления неправильности какого-либо модуса (или «для отбрасывания модуса», как предлагает говорить Я. Лукасевич) достаточно найти набор конкретных терминов, делающих посылки истинными, а заключение ложным, то для установления правильности модуса (или «принятия модуса» в терминологии Лукасевича) нужно провести общее доказательство, как в математике. Действительно, без такого доказательства, сколько бы мы конкретных терминов ни подставляли, из того, что для них и посылки, и заключения будут истинными, мы не можем быть уверены, что это всегда будет так и что не найдутся такие термины, которые сделают посылки истинными, а заключение ложным. Это совершенно аналогично тому, как, скажем, в геометрии нельзя утверждать теорему Пифагора, проверив ее на сколь угодно большом числе прямоугольных треугольников; *эту теорему нужно доказать*. Отбрасывание неправильных модусов и доказательство правильных было проведено уже Аристотелем в его «Аналитике». Причем отбрасывание было по существу обосновано контрпримерами, а доказательство правильности было проведено, исходя из правильных силлогизмов первой фигуры, принятых в качестве аксиом, применением правил обращения и отрицания суждений, а также, в неявной форме, с помощью законов логики высказываний. Сам Аристотель правильные силлогизмы первой фигуры, положенные в основу доказательства, называет не аксиомами, а *совершенными силлогизмами*, все остальные силлогизмы, для которых он дает доказательства, — *несовершенными силлогизмами*. Он пишет: «Совершенным силлогизмом я называю такой, который для выявления необходимости (заключения) не нуждается ни в чем другом, кроме того, что принято. Несовершенным я называю такой, который хотя и является необходимым благодаря положенным в основание (данного силлогизма) терминам, но нуждается в одном или нескольких (суждениях),

которых нет в посылках»¹⁾). Ян Лукасевич комментирует это изречение Аристотеля так: «Этот отрывок нуждается в переводе на язык логической терминологии. Каждый аристотелевский силлогизм — это истинная импликация, антецедентом которой является соединение посылок, а консеквентом — заключение. То, что говорит Аристотель, следовательно, означает, что в совершенном силлогизме связь между антецедентом и консеквентом очевидна сама по себе, без какого-либо дополнительного предположения. Совершенные силлогизмы — это самоочевидные утверждения, которые не доказываются и не нуждаются в доказательствах; они недоказуемы, *ἀναπόδεικτοι*. Недоказуемые истинные утверждения дедуктивной системы ныне называются аксиомами. Следовательно, совершенные силлогизмы суть аксиомы силлогистики. С другой стороны, несовершенные силлогизмы не самоочевидны; они должны быть доказаны с помощью одного или более предположений, которые следуют из посылок, но отличны от них»²⁾).

Так сформулированная задача и была решена Аристотелем. Нужно сказать, что построенная подобным образом Аристотелем теория силлогизмов явилась одним из великих достижений человеческой мысли, во многом напоминающим другие шедевры древнегреческой науки, такие, как «Начала» Евклида и геометрические и механические трактаты Архимеда. Удивительным являются и сама постановка задачи и глубокие мысли, которые были применены для преодоления трудностей на пути ее решения. Ведь здесь, как и в математических работах, которые мы упомянули, нужно все время иметь в виду, что древние греки еще не обладали той совершенной символикой, которой обладаем мы. Кроме того, сама идея проведения доказательств, исходя из небольшого числа очевидных утверждений — аксиом, находилась в зачаточном состоянии.

В рамках математической логики нет необходимости принимать правильные модусы первой фигуры в качестве аксиом. Их можно доказать, исходя из основных законов логики высказываний и логики предикатов. Эти последние, может быть, не столь очевидны, как совершенные силлогизмы (например, силлогизм *Barbara*) — что объяс-

¹⁾ Аристотель, Аналитика, т. 1, гл. 1, 24, 22, Госполитиздат, 1952.

²⁾ Я. Лукасевич, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, гл. III, § 15, ИЛ, 1959.

няется в первую очередь тем, что они пока менее известны и привычны, — но во всяком случае имеют гораздо большую область применений и поэтому естественно могут считаться более общими.

Рассмотрим правильные силлогизмы первой фигуры. Для наименования правильных модусов были введены специальные мнемонические обозначения — слова, содержащие три буквы из числа *a, e, i, o*, указывающие последовательно типы суждений большой посылки, малой посылки и заключения. В этих обозначениях существует четыре правильных модуса первой фигуры: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio*, т. е. схемы заключения:

<i>Barbara</i>	<i>Celarent</i>	<i>Darii</i>	<i>Ferio</i>
<i>Ma P</i>	<i>Me P</i>	<i>Ma P</i>	<i>Me P</i>
<i>Sa M</i>	<i>Sa M</i>	<i>Si M</i>	<i>Si M</i>
<u><i>Sa P</i></u>	<u><i>Se P</i></u>	<u><i>Si P</i></u>	<u><i>So P</i></u>

Докажем правильность этих модусов, представляя входящие в них суждения в виде формул логики предикатов и используя законы логики высказываний и логики предикатов.

Модус *Barbara*. Конъюнкция посылок имеет вид

$$\forall x (S(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x (M(x) \rightarrow P(x)) \equiv \\ \equiv \forall x ((S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x))).$$

Эта равносильность имеет место согласно правилу вынесения квантора всеобщности за знак конъюнкции:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)).$$

Но, согласно закону силлогизма $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$, если выражение в скобках $((S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x)))$ истинно для всякого x , то для всякого x истинно также $S(x) \rightarrow P(x)$, т. е. истинно $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$. А это и есть заключение силлогизма *Barbara*.

Модус *Celarent*. Аналогично, как и в случае *Barbara*, записываем посылки в виде

$$\forall x (M(x) \rightarrow \neg P(x)) \text{ и } \forall x (S(x) \rightarrow M(x)).$$

Итак, имеем

$$\forall x (S(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x (M(x) \rightarrow \neg P(x)) \equiv \\ \equiv \forall x ((S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow \neg P(x))).$$

И опять на основании закона силлогизма так же, как и в случае Barbara, получаем $\forall x (S(x) \rightarrow \neg P(x))$, т. е. заключение модуса Celarent.

Аналогично, только несколько более сложно, доказывается правильность модусов Darii, Ferio.

Правильность модусов других фигур можно доказать, исходя из модусов первой фигуры: Barbara, Celarent, Darii, Ferio. Это именно то, что делал Аристотель. Покажем на примере трех модусов второй фигуры, как это делается.

Существует четыре правильных модуса второй фигуры: Cesare, Camestres, Festino, Baroco.

Cesare	Camestres	Festino	Baroco
$Pe M$	$Pa M$	$Pe M$	$Pa M$
$Sa M$	$Se M$	$Si M$	$So M$
$\frac{Se P}{\text{---}}$	$\frac{Se P}{\text{---}}$	$\frac{So P}{\text{---}}$	$\frac{So P}{\text{---}}$

Модус Cesare сводится очень просто к модусу Celarent. Для этого достаточно применить закон обращения для общеотрицательных суждений: «Если $Pe M$, то $Me P$ » (и наоборот). Этот закон в свою очередь, как мы видели, является простым следствием коммутативного закона для конъюнкции: $x \wedge y \equiv y \wedge x$. Ведь $Pe M$ можно записать как $\neg \exists x (P(x) \wedge M(x))$, а это равносильно $\neg \exists x (M(x) \wedge P(x))$, т. е. $Me P$. Применяя же обращение к первой посылке в модусе Cesare и оставляя вторую посылку неизменной, мы получаем посылки

$$\begin{array}{c} Me P \\ Sa M \end{array}$$

т. е. посылки модуса Celarent, из которого, как нам уже известно, следует заключение $Se P$.

Тем самым этот модус доказан.

Модус Camestres в свою очередь с помощью закона обращения сводится к предыдущему (Cesare).

Действительно, если в модусе Camestres

$$\begin{array}{c} Pa M \\ Se M \\ \hline Se P \end{array}$$

обратить заключение и поменять порядок следования посылок, то получим

$$\begin{array}{c} Se M \\ Pa M \\ \hline Pe S \end{array}$$

Считая теперь P малым термом, а S — большим, получим как раз уже рассмотренный модус Cesare.

Модус Festino

$$\begin{array}{c} Pe M \\ Si M \\ \hline So P \end{array}$$

обращением первой посылки превращается в

$$\begin{array}{c} Me P \\ Si M \\ \hline So P \end{array}$$

т. е. в модус Ferio первой фигуры и т. д. Нужно сказать, что не все доказательства сведения столь же просты, как рассмотренные, но принципиальные трудности здесь не возникают.

Приведем для полноты правильные модусы третьей и четвертой фигур. Третья фигура обладает также четырьмя правильными модусами: Datisi, Feriso, Disamis, Bocardo; к четвертой фигуре относятся три правильных модуса Calemes, Fresison, Dimatis. Итак, в общей сложности имеются 15 правильных модусов. Традиционная логика признавала правильными еще девять модусов. Расхождение связано с различием в понимании смысла суждений. Девять дополнительных модусов возникают, если считать, что термы во всех суждениях силлогизмов заведомо не пусты. Мы уже выше говорили о том, почему современная математическая логика предпочитает отказываться от этого требования.

На этом мы закончим наше обсуждение традиционной силлогистики.

Совсем кратко остановимся на возможных обобщениях этой теории.

Уже в древности ставился вопрос о рассмотрении таких обобщенных силлогизмов, в которых заключение делалось бы не из двух, а из большего числа суждений. Подобными вопросами занимался, например, древнеримский врач

и мыслитель Гален. Сразу же, например, видно, что имеет место следующая правильная схема заключения (модус):

$$\begin{array}{c} Ma P \\ Na M \\ Sa N \\ \hline Sa P \end{array}$$

обобщающая модус Барбара и легко из него доказываемая. Здесь, как видно, в посылках содержатся два средних терма M и N , исключаемых в заключении. Все суждения здесь общеутвердительные. Для случая схем с другими типами суждений и с большим числом посылок задача установления всех правильных модусов заключения окончательно еще не решена. Подобные модусы с числом посылок больше двух и соответственно со многими средними термами получили название полисиллогизмов.

Некоторый интерес представляют исследования обобщенных суждений, утверждающих отношения между тремя, четырьмя и т. д. термами и соответствующих схем заключений, позволяющих исключать некоторые (средние) термы из посылок подобного вида. Но, как нетрудно видеть, эти обобщенные суждения и заключения, так же как и традиционные суждения и силлогизмы, являются объектами исследования теории одноместных предикатов, в рамках которой они сейчас и изучаются.

§ 6. Применение выражений логики предикатов для описания некоторых отношений

Язык логики предикатов существенно более богат и гибок, чем язык логики высказываний. Он хорошо приспособлен, чтобы описывать математические понятия и утверждения, такие как аксиомы, теоремы, доказательства. Такое описание позволяет четко и строго выражать логические связи между понятиями и утверждениями, с которыми имеет дело та или иная математическая теория. Поэтому средства, выработанные в математической логике и, в частности, в логике предикатов, являются основным инструментом для исследования оснований математики, на чем мы остановимся несколько позже. Но открывающиеся здесь возможности во все возрастающей мере используются и вне математики.

Особенно просто на языке логики предикатов выражаются самые общие и абстрактные понятия и отношения. Конкретные привычные разделы алгебры, геометрии и анализа также в принципе хорошо поддаются описанию в рамках логики предикатов, но ввиду их большего богатства здесь возникают зачастую чисто технические трудности при описании. Поэтому мы остановимся в настоящем параграфе на рассмотрении таких общих понятий, как *эквивалентность*, *порядок* (или упорядочение) и *функция* (или отображение).

1. Эквивалентности. Одним из простейших типов бинарных отношений являются так называемые эквивалентности. Это понятие мы постараемся уяснить на ряде примеров как из области математики, так и из нематематических областей.

Эквивалентностью является, например, отношение параллельности, определенное, скажем, на множестве прямых плоскости. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек или же они совпадают. Это — бинарный предикат, определенный на множестве прямых. Обозначим его через Пар (x, y) . Для параллельных прямых g, h предикат Пар (g, h) имеет значение *и*, для непараллельных — значение *л*.

Очевидно, отношение параллельности обладает следующими свойствами:

1) Каждая прямая параллельна сама себе. Для всех прямых g Пар (g, g) имеет значение *и*: $\forall x \text{ Пар } (x, x)$.

2) Если прямая g параллельна прямой h , то прямая h параллельна g :

$$\forall x \forall y (\text{Пар } (x, y) \rightarrow \text{Пар } (y, x)).$$

3) Если прямая g параллельна прямой h и прямая h параллельна прямой k , то прямая g параллельна k :

$$\forall x \forall y \forall z ((\text{Пар } (x, y) \wedge \text{Пар } (y, z)) \rightarrow \text{Пар } (x, z)).$$

Свойствами 1) — 3) характеризуются отношения эквивалентности, одним из примеров которых является параллельность.

Свойство 1) называется *рефлексивностью*. Более точно: двуместный предикат $P(x, y)$ рефлексивен, если для любого элемента x $P(x, x)$ имеет значение *и*, или, что то же самое, если $\forall x P(x, x)$ — истинное высказывание.

Второе отмеченное нами свойство — *симметричность* предиката. Предикат $P(x, y)$ симметричен, если из $P(x, y)$ следует $P(y, x)$ для произвольных x, y .

Наконец, третье свойство — *транзитивность*. Предикат $P(x, y)$ транзитивен, если из $P(x, y)$ и $P(y, z)$ следует $P(x, z)$.

Всякий предикат, для которого выполняются все три свойства: рефлексивность, симметричность и транзитивность — называется эквивалентностью. Тем самым условие для того, чтобы некоторый предикат $P(x, y)$ был эквивалентностью, записывается формулой

$$\forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)).$$

Приведем несколько дальнейших примеров отношений эквивалентности. Эквивалентностью будет равенство треугольников (или вообще произвольных фигур) на плоскости (или в пространстве). Эквивалентностью будет также отношение подобия на плоскости (или в пространстве).

Важным примером отношения эквивалентности в арифметике целых чисел являются так называемые сравнения по модулю. Пусть m — некоторое целое положительное число. Возьмем, скажем, для определенности $m = 5$. Будем говорить, что два целых числа a и b сравнимы по модулю 5, если разность $a - b$ этих чисел делится без остатка на 5. Это отношение записывается так:

$$a \equiv b \pmod{5}.$$

Например, как легко проверить, имеют место сравнения:

$$2 \equiv 7 \pmod{5}, \quad -1 \equiv 4 \pmod{5}, \quad 21 \equiv 31 \pmod{5},$$

между тем как $6 \not\equiv 3 \pmod{5}$. Сравнение по модулю 5 является двуместным предикатом, определенным на множестве целых чисел. Обозначим этот предикат $Ср_5(x, y)$, т. е. $Ср_5(x, y)$ — это другая запись утверждения $x \equiv y \pmod{5}$. Легко проверить, что $Ср_5(x, y)$ — эквивалентность. Действительно, всякое целое число сравнимо с самим собой, ведь 0 делится на 5. Далее, если $a \equiv b \pmod{5}$, то $b \equiv a \pmod{5}$: если $a - b$ делится на пять, то и $b - a$ делится на пять. Наконец, из $a \equiv b \pmod{5}$ и $b \equiv c \pmod{5}$ следует $a \equiv c \pmod{5}$: $a - c = (a - b) +$

+ $(b - c)$, и так как $a - b$ и $b - c$ делятся на 5, то и $a - c$ делится на 5. Тем самым так определенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Итак, отношение $\text{Ср}_5(x, y)$, определенное на множестве целых чисел, представляет собой эквивалентность.

Вне математики отношения эквивалентности играют также очень большую роль. С эквивалентностями мы имеем дело всякий раз, когда мы совокупность каких-либо объектов разбиваем на некоторое число групп, отвечающих некоторому набору взаимно исключающих признаков. Так, множество всех людей можно разбить по национальностям, множество всех животных разбивается на виды и т. д.

Всякий раз, когда мы имеем некоторое множество M объектов и данные объекты обладают одним и только одним из признаков t_1, t_2, \dots, t_n , образующих набор T , то мы имеем дело с некоторой эквивалентностью, определенной на M . Это отношение эквивалентности $P_T(x, y)$ определяется так. Будем считать, что $P_T(x, y)$ принимает значение u тогда и только тогда, когда x и y обладают одним и тем же признаком t_i из набора T . Само собой разумеется, что при этом как раз выполняются законы рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Подобная ситуация встречается на каждом шагу во всех областях науки и человеческой деятельности.

2. Упорядочения. Наряду с отношением эквивалентности в науке и практике большую роль играет другой тип бинарных отношений: отношения порядка (или упорядочения). С отношением порядка мы встречаемся, когда сравниваем числа по величине, людей по старшинству, книги на полке относительно их расположения слева направо, когда рассматриваем последовательность событий, упорядоченных во времени, и т. д. Соответствующие предикаты описываются на русском языке словами «больше», «старше», «правее», «позже», «следует за» и др. Установим характерные свойства отношения порядка и укажем, как они записываются средствами языка логики предикатов.

Для определенности будем иметь в виду какой-нибудь пример множества M , в котором определено некоторое отношение порядка. В качестве множества M возьмем множество N натуральных чисел (включая 0) и рассмотрим на нем отношение между числами, описываемое

выражением «больше или равно»: «5 больше или равно 5» истинно, «7 больше или равно 3» истинно, «10 больше или равно 15» ложно и т. д. Вообще для любых двух натуральных чисел x и y утверждение « x больше или равно y » — вполне определенное предложение, истинное или ложное. Оно определяет некоторый предикат $B(x, y)$, определенный на множестве натуральных чисел. Отметим некоторые свойства этого предиката.

1) Каждое число x больше или равно самому себе, т. е. истинно утверждение

$$\forall x B(x, x). \quad (1)$$

Это — условие рефлексивности, уже известное нам из определения эквивалентности.

2) В отличие от отношения типа эквивалентности для нашего отношения $B(x, y)$ не выполняется свойство симметричности. Здесь имеет место в некотором смысле противоположное свойство, которое естественно назвать свойством *антисимметричности*. Если свойство симметричности некоторого предиката $P(x, y)$ означает, что $P(x, y)$ и $P(y, x)$ истинны или ложны одновременно, то в случае отношения $B(x, y)$ — «больше или равно» — $B(x, y)$ и $B(y, x)$ могут одновременно быть истинными только в том случае, если x и y одно и то же число:

$$\forall x \forall y ((B(x, y) \wedge B(y, x)) \rightarrow (x = y)) \quad (2)$$

(свойство антисимметричности).

3) Так же, как и для случая эквивалентностей, отношение транзитивно

$$\forall x \forall y \forall z ((B(x, y) \wedge B(y, z)) \rightarrow B(x, z)). \quad (3)$$

4) Наконец, для отношения $B(x, y)$ выполняется свойство, характерное для отношения порядка и не имеющее аналога в отношениях эквивалентности. Это свойство говорит о том, что для любых двух чисел x и y верно « x больше или равно y » или « y больше или равно x »:

$$\forall x \forall y (B(x, y) \vee B(y, x)) \quad (4)$$

(свойство дихотомии).

Произвольный предикат $P(x, y)$, определенный на некотором множестве M , который обладает свойствами (1), (2), (3), (4), называется отношением порядка, опреде-

ленным на M . Таким образом, предикат $P(x, y)$ — отношение порядка, если он удовлетворяет формуле

$$\begin{aligned} \forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow (x = y)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Сделаем следующее замечание. Мы непосредственно ввели в рассмотрение отношение «больше или равно», а не отношение, описываемое словом «больше». Если обозначить через $B(x, y)$ отношение

$$\text{«}x \text{ больше } y\text{» } (x > y),$$

то, конечно,

$$B(x, y) \equiv (B(x, y) \vee (x = y))$$

и, обратно,

$$B(x, y) \equiv (B(x, y) \wedge \neg(x = y)).$$

Таким образом, отношения $B(x, y)$ и $B(x, y)$ непосредственно сводимы друг к другу. Нетрудно проверить, что свойства предиката $B(x, y)$, соответствующие свойствам (1), (2), (3), (4), будут следующие:

$$\forall x \neg B(x, x) \quad (1')$$

(свойство антирефлексивности),

$$\forall x \forall y (B(x, y) \rightarrow \neg B(y, x)) \quad (2')$$

(свойство антисимметричности),

$$\forall x \forall y \forall z ((B(x, y) \wedge B(y, z)) \rightarrow B(x, z)) \quad (3')$$

(свойство транзитивности),

$$\forall x \forall y (B(x, y) \vee B(y, x) \vee (x = y)) \quad (4')$$

(свойство трихотомии).

Зачастую под отношением порядка понимается двуместный предикат $P(x, y)$, удовлетворяющий свойствам (1'), (2'), (3'), (4'), т. е. удовлетворяющий формуле

$$\begin{aligned} \forall x \neg P(x, x) \vee \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \vee \\ \vee \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \vee \\ \vee \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x) \vee (x = y)). \end{aligned} \quad (5')$$

Мы же будем придерживаться определения порядка свойствами (1), (2), (3), (4). Это для наших целей будет более удобно.

Конечно, отношение $B(x, y)$, определенное на множестве N натуральных чисел, обладает рядом других свойств, которые мы не выделили в качестве характерных для определения отношения порядка. Так, например, среди натуральных чисел имеется наименьшее число (именно 0), что выражается выполнением условия

$$\exists y \forall x B(x, y). \quad (6)$$

(Существует такое число y , что для всех x x больше или равно y .)

Если мы рассмотрим, например, отношение $B_1(x, y)$ — «больше или равно», определенное на множестве всех целых чисел, то оно удовлетворяет формуле (5) и является по определению отношением порядка, но формула (6) уже не удовлетворяется предикатом $B_1(x, y)$.

Далее, для отношения $B(x, y)$ на N выполняется такое свойство:

$$\forall y \exists x (B(x, y) \wedge \neg(x = y)) \quad (7)$$

(для всякого числа y существует большее число). Это свойство не выполняется для аналогичного предиката, определенного на множестве отрицательных чисел.

Наконец, для отношения $B(x, y)$ на N имеет место такое утверждение, более сильное, чем (7):

$$\forall y \exists x (B(x, y) \wedge \neg(x = y) \wedge \forall z ((B(z, y) \wedge \neg(z = y)) \rightarrow B(z, x))). \quad (8)$$

Эта формула говорит о том, что для каждого числа y существует «непосредственно большее». (Для всякого y существует такое x , что x больше y , и для всякого z , если z больше y , то z больше или равно x .) Это условие выполняется также для отношения «больше или равно» в области целых чисел, но не выполняется для отношения «больше или равно» в области рациональных чисел. Для отношения $B_2(x, y)$ в области рациональных чисел истинно такое утверждение:

$$\forall x \forall y \exists z ((B_2(x, y) \wedge \neg(x = y)) \rightarrow (\neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge B_2(z, y) \wedge B_2(x, z))). \quad (9)$$

(Если x больше y , то существует такое z , что z больше y и x больше z .) Тем самым для отношения «больше» $B_2(x, y)$ ни для какого элемента y не существует непосредственно большего элемента. Отношения порядка, для которых выполняется формула (9), называются *плотными*.

Наряду с отношениями порядка как в математике, так и в других областях знания зачастую приходится рассматривать более слабые отношения, чем отношения порядка. Под этим подразумеваются такие предикаты, для которых выполняются не все характерные свойства (1), (2), (3), (4), а только некоторые из них. Так, часто встречаются отношения, для которых выполняются свойства (1), (2), (3), но не выполняется свойство (4) трихотомии. Такие отношения называются отношениями *частичного порядка*.

Всякое отношение порядка является также отношением частичного порядка, но не наоборот. Примером отношения частичного порядка, не являющимся отношением порядка, может служить отношение включения для подмножеств некоторого множества.

3. Функциональные отношения. Исключительно важным типом двуместных отношений являются функции, или, как их иногда называют, отображения. Напомним, что под функцией или отображением некоторого множества M в некоторое множество N понимается закон, по которому каждому элементу m множества M соответствует один вполне определенный элемент n множества N . Это соответствие принято записывать в форме $n = f(m)$. Мы ограничимся случаем, когда множества M и N совпадают, и говорим тогда об отображении множества M в себя. Здесь речь идет, следовательно, о соответствиях, сопоставляющих каждому элементу m из M некоторый вполне определенный элемент n из M . Функции $y = \sin x$, $y = x^2$, $y = 5x + 3$, известные из анализа, являются отображениями множества вещественных чисел в себя.

Как мы уже говорили (гл. III, § 1), всякой функции $f(x)$, определенной на M со значениями в M , мы можем отнести некоторый вполне определенный предикат $F(x, y)$ на M , положив $F(m, n) = u$, если $n = f(m)$, и $F(m, n) = l$, если $n \neq f(m)$. Нетрудно видеть, что задание предиката $F(x, y)$ однозначно определяет функцию $y = f(x)$. Спрашивается, какие же двуместные предикаты $P(x, y)$

соответствуют функциям? Такие предикаты уместно называть *функциональными*. Чтобы их характеризовать, мы должны учесть определение понятия функции: 1) каждому x обязательно соответствует элемент y и 2) каждому x соответствует только один элемент y . Итак, всякий функциональный предикат удовлетворяет следующим двум формулам:

$$\forall x \exists y P(x, y), \quad (1)$$

$$\forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(x, z)) \rightarrow (y = z)). \quad (2)$$

(Вторая формула содержательно означает, что если y сопоставлен x и z сопоставлен x , то y и z — один и тот же элемент.) Таким образом, предикаты, которые удовлетворяют второй формуле, характеризуются тем, что они сопоставляют каждому элементу x множества M не более одного элемента y . Это соответствует понятию функции, *не обязательно всюду определенной*. Заметим, что в анализе мы очень часто встречаемся с подобным понятием. Так, например, функция \sqrt{x} не определена для отрицательных чисел и нуля, а функция $\frac{1}{x}$ не определена для $x=0$. Соответствующие предикаты удовлетворяют условию (2), но не удовлетворяют условию (1). Согласно нашему определению функциональные предикаты удовлетворяют условиям (1) и (2). Они соответствуют всюду определенным функциям.

Среди функций (отображений) большую роль играют два частных случая: это так называемые *взаимно однозначные отображения* и *отображения на все множество*.

Отображение множества в себя называется *взаимно однозначным* в том и только в том случае, когда различные элементы переходят в различные. Это требование соответствует тому, что соответствующий функциональный предикат должен удовлетворять формуле

$$\forall x \forall y \forall z \forall u ((P(x, z) \wedge P(y, u) \wedge \wedge \neg (x = y)) \rightarrow \neg (z = u)). \quad (3)$$

Другое важное требование, которое часто накладывается на функцию, состоит в том, что каждый элемент y из M должен быть сопоставлен некоторому элементу x .

Это требование выражается формулой

$$\forall y \exists x P(x, y). \quad (4)$$

Особое значение имеют те функции на M , которые являются одновременно взаимно однозначными и отображениями на все множество M . Такие отображения обыкновенно называются *подстановками* множества M . Из предыдущего видно, что некоторый предикат $P(x, y)$ будет тогда и только тогда функциональным предикатом некоторой подстановки множества M , когда он удовлетворяет конъюнкции формул (1), (2), (3) и (4).

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

После того как мы кратко описали некоторые элементарные разделы математической логики, мы хотим немного остановиться на связи математической логики с исследованиями по основаниям математики. Как мы уже несколько раз отмечали, центральные проблемы математической логики были до сих пор тесно связаны с вопросами, возникающими при изучении строения математических теорий. Именно эти вопросы послужили основным стимулом для развития математической логики и именно здесь математическая логика нашла свои самые плодотворные применения. До самого последнего времени прилагательное «математическая» в выражении «математическая логика» многими понималось сразу в двух смыслах: во-первых, в том смысле, что в этой науке логические заключения изучаются с применением аппарата математики; во-вторых, в том смысле, что основным объектом исследования при этом являются логические рассуждения в самой математике. В последние два десятилетия такую точку зрения уже нельзя считать вполне правомерной. Действительно, в связи с возникновением и развитием кибернетики и в особенности в связи с теорией и практикой автоматических вычислительных и управляющих машин математическая логика приобретает новые, широкие области приложения вне математики. В частности, математическая логика начинает внедряться в такие нематематические дисциплины, как языкознание, экономику, медицину, психологию, педагогику, право. Но здесь мы находимся, несомненно, только в самом начале развития и нам кажется уместным в рамках нашей книги не касаться этих вопросов. Несмотря на такое расширение области приложений математической логики, пока и сегодня еще самые глубокие результаты относятся к проблематике,

касающейся оснований математики, и мы, хотя и кратко, должны на этом остановиться.

Общепринято считать математику наукой дедуктивной. Под этим понимается та характерная особенность математики, которая говорит о том, что истинность математических утверждений, в отличие от утверждений естественных наук, не устанавливается на основании опыта и наблюдения, а выводится (дедуцируется) с помощью логических рассуждений, исходя из небольшого числа исходных утверждений. Исходные положения называются *аксиомами* или *постулатами*. Истинность аксиом принимается без доказательства; все остальные утверждения называются теоремами и доказываются (выводятся) из аксиом. Понятия, участвующие в утверждениях, также разделяются на исходные — общепринятые и очевидные — и производные понятия, которые должны быть определены через исходные. Такие требования к дедуктивной науке выработались древнегреческими мыслителями и были довольно четко сформулированы Аристотелем. В Древней Греции математика приняла форму дедуктивной науки и сохранила эту форму и по сей день. Во II в. до н. э. Евклид в своих «Началах» дал аксиоматическое (дедуктивное) изложение геометрии, которое в течение двух тысячелетий считалось основным и идеальным примером дедуктивного построения знания. Это изложение явилось завершением основного этапа развития древнегреческой математики, продолжавшегося примерно с V до II в. до н. э. Конечно, не следует думать, что идея построения математики как дедуктивной науки возникла в Древней Греции в V—II вв. до н. э. на пустом месте. Этой идее предшествовало длительное развитие математики, происходившее в Древнем Египте, в Древнем Вавилоне и в ранние века древнегреческой истории, когда математика, которая вначале была набором полученных из опыта правил арифметических действий и геометрических фактов, постепенно приобрела знакомую нам форму. К сожалению, весь этот очень интересный и важный процесс становления математики мало изучен¹⁾.

¹⁾ Относительно затрагиваемых здесь вскользь вопросов, относящихся к истории математики, мы рекомендуем читателю ознакомиться более подробно в следующей литературе: Н. Б у р б а к и, Очерки по истории математики, ИЛ, 1963; Б. Л. В а н д е р В а р д е н, Пробуждающаяся наука, ИЛ, 1959; Э. К о л ь м а н, История

Нужно сказать, что, как это постепенно выяснилось, изложение в «Началах» Евклида довольно далеко от безупречного аксиоматико-дедуктивного построения геометрии, которое соответствовало бы требованиям, предъявляемым Аристотелем к дедуктивным наукам. Сразу же бросаются в глаза следующие слабые стороны.

1. Делается попытка дать определение не только производных, но и исходных понятий¹⁾. Это противоречит основному принципу, согласно которому базисные понятия в определении не нуждаются. Если какое-то понятие определяется, то в определении встречаются другие понятия, о которых предполагается, что они являются более простыми, а определяемое понятие тем самым оказывается уже производным, а не исходным. В данном случае в приведенных определениях понятия «точка», «линия», «прямая», «поверхность» и т. д. определяются на основе понятий «длина», «ширина», «одинаково расположены» и т. д. При этом неясно, следует ли эти определяющие понятия рассматривать как исходные, а если да, то почему они более очевидны и просты, чем определяемые понятия. Впрочем, если даже оставить этот вопрос в стороне, то рассматриваемые евклидовские определения никак не соответствуют требованиям аристотелевской логики. Как утверждал В. Ф. Каган, «приведенные определения не только составляют самое слабое место во всем

математики в древности, Физматгиз, 1961; К. А. Рыбников, История математики, Изд-во МГУ, 1961.

¹⁾ Первая книга «Начал» открывается следующими определениями.

«Определения.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Концы линии суть точки.
4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно лежащих на ней точек.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы же поверхности суть линии.
7. Плоскость есть такая поверхность, которая одинаково расположена по отношению к лежащим на ней прямым.
8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух линий на плоскости, которые друг друга встречают, но не расположены на одной прямой.
9. И если линии, образующие угол, прямые, то угол называется прямолинейным».

сочинений, но в известной мере являются источником большинства его дефектов»¹⁾).

2. Приводимые Евклидом аксиомы и постулаты не являются достаточными для доказательства теорем геометрии. В доказательствах используются многочисленные другие утверждения, считающиеся очевидными, но нигде явно не сформулированные.

Эти недостатки вполне исправимы и были действительно исправлены геометрами в конце XIX в., когда математическая мысль после многовекового перерыва опять обратилась к представлению геометрии в строгой форме, соответствующей аристотелевскому идеалу аксиоматико-дедуктивной науки. Одновременно в это же время была постепенно разработана достаточно строгая аксиоматическая форма и для других математических дисциплин: для арифметики, алгебры, анализа, а несколько позже, в начале XX в., для теории вероятностей и для теории множеств.

Возникает вопрос, почему понадобился такой большой срок для приведения в порядок изложения Евклида. На это можно ответить, что до XIX в. математики недостаточно обращали внимание на логическую строгость. Как в геометрии, так и в других областях математики господствовало изложение, которое можно было бы характеризовать как наглядное и неявно аксиоматическое. Нужно сказать, что оно и сейчас общепринято во всех случаях, когда дело идет об изложении конкретного математического материала. Как и в «Началах» Евклида, большинством исходных положений пользуются по мере надобности: в качестве аксиом они в большинстве случаев не формулируются. Считается, что они столь наглядны, просты и очевидны, что могут быть приняты как исходные, и не только не нуждаются в доказательствах, но даже и в явной формулировке. В такой формулировке и в доказательстве нуждаются только достаточно сложные утверждения, которые выделяются как теоремы, причем основное назначение доказательства состоит в том, чтобы убедить читателя, слушателя и самого автора в

¹⁾ В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. 1, Гостехиздат, 1949, стр. 41. В этой книге содержится очень детальное критическое изложение «Начал» Евклида. Читателю, желающему более глубоко ознакомиться с затрагиваемой нами тематикой, мы очень советуем обратиться к этой книге.

истинности доказываемого утверждения. В эпоху бурного развития анализа — в XVII, XVIII и XIX вв. — такая форма была вполне удовлетворительной.

Такое состояние объяснялось еще тем, что математика, в частности геометрия, имела дело исключительно с очень наглядными и привычными представлениями. В истинности исходных положений, независимо от того, формулировались ли они явно в виде аксиом или использовались без явной формулировки, никакого сомнения не возникало. Кроме того, не возникало никаких сомнений относительно того, что следует понимать под основными неопределяемыми понятиями, о которых говорят аксиомы и теоремы данной области математики. Для описываемой формы аксиоматического построения математики — и в первую очередь геометрии — характерен следующий основной принцип. *Исходные положения — аксиомы и основные понятия — имеют вполне определенный содержательный смысл; аксиомы истинны в силу своей очевидности. Теоремы истинны, так как они выводятся логическими рассуждениями из истинных посылок, а основным свойством правильных логических умозаключений является то, что, примененные к истинным посылкам, они дают истинные заключения.* Эта форма аксиоматического построения, единственно известная до конца XIX в., называется *содержательной*. Развитие математики в XIX и XX вв. привело к созданию некоторого нового уровня дедуктивно-аксиоматических построений, который принято называть *формальным*.

3. Большое значение для изменения точки зрения на вопрос об очевидности аксиом и основных понятий имело возникновение неевклидовой геометрии, созданной в первой половине XIX в. великим русским математиком Н. И. Лобачевским и замечательным венгерским математиком Я. Бояи. На причинах этого возникновения мы должны кратко остановиться.

Среди аксиом и постулатов в «Началах» Евклида имеется следующее утверждение, известное как постулат (аксиома) о параллельных, так называемый пятый постулат Евклида. Его дословная формулировка гласит:

«И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно

встретятся с той стороны, где углы, меньшие двух прямых»¹⁾).

В дальнейшем эта аксиома формулировалась обыкновенно в несколько иной форме, которая, как можно показать, по существу равносильна приведенному пятому постулату:

«Для всякой прямой g и для всякой точки P вне g существует одна и только одна прямая, проходящая через P и не пересекающая g ».

Более кратко можно также сказать, что данная аксиома утверждает, что через всякую точку вне прямой g можно провести одну и только одну прямую, параллельную g .

В течение долгого времени многие математики полагали, что пятый постулат является не аксиомой, а теоремой, которая может быть доказана из других аксиом. Известны многочисленные попытки построить такое доказательство. (Особенно известны попытки доказательства итальянского математика Саккери в XVII в. и немецкого математика Ламберта в XVIII в.) Анализ этих доказательств показывает, что они или содержат логические ошибки или же неявно используют утверждения, правда очень наглядные, но, по сути, равносильные пятому постулату²⁾).

Большинство доказательств пытались строить приведением к абсурду. Предполагалось, что через точку P вне прямой g проходит несколько (более одной) прямых, параллельных g , и из этого предположения последовательно выводились следствия в поисках противоречия. Если бы противоречие было найдено, то принятое отрицание аксиомы о параллельных было бы опровергнуто, и искомое утверждение доказано. Но несмотря на все попытки, никаких противоречий не получалось. Правда, получались следствия, противоречащие всем привычным наглядным представлениям, но искомое логическое противоречие не возникало³⁾).

¹⁾ См. «Начала» Евклида, книги I—VI, Гостехиздат, 1950, стр. 15.

²⁾ Например, можно показать, что для доказательства аксиомы о параллельных достаточно предположить, что существуют не равные, но подобные треугольники.

³⁾ Подробное изложение читатель найдет в уже цитированной книге В. Ф. Кагана «Основания геометрии», т. 1, и в книге В. Ф. Кагана «Лобачевский»,

В двадцатых годах прошлого столетия Н. И. Лобачевский был первым, кто явно высказал мысль о том, что, заменив аксиому о параллельности противоположным утверждением, можно будет получить в качестве следствия непротиворечивое построение некоторой новой геометрии, отличной от привычной геометрии Евклида.

Вместо аксиомы Евклида о параллельных Лобачевский рассматривал аксиому, согласно которой через точку P вне прямой g проходит бесконечно много прямых, не пересекающих g . Совокупность этих прямых заполняет некоторый угол (рис. 14).

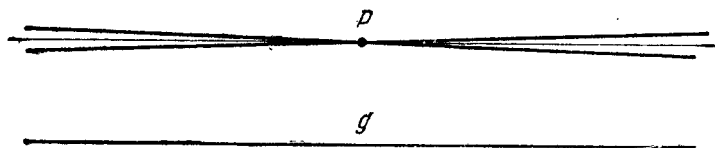


Рис. 14.

Лобачевскому удалось довольно далеко разработать возникающую из этого предположения неевклидову геометрию, которую он назвал «воображаемая геометрия» и которую теперь принято называть *гиперболической геометрией*, или *геометрией Лобачевского*.

Несколько лет спустя независимо от Лобачевского аналогичную мысль развил в своих работах венгерский математик Я. Бояи.

Мы не будем описывать геометрию Лобачевского, а отметим и подчеркнем только, что, несмотря на то, что утверждения этой геометрии во многом противоречат привычным для нас наглядным представлениям, вся теория в целом представляет собой логически безупречное дедуктивно-аксиоматическое построение. В дальнейшем, в конце XIX в. было строго доказано, что геометрия Лобачевского столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида.

С другой стороны, уже в XX в. геометрия Лобачевского и некоторые ее обобщения легли в основу математического аппарата общей теории относительности Эйнштейна. Тем самым подтвердилось, что эта геометрия является не бесполезной игрой ума, а полноценной математической дисциплиной.

С точки зрения логики важность возникновения неевклидовой геометрии Лобачевского состоит в том, что она впервые очень существенно подорвала наивное мнение, согласно которому истинность аксиом при дедуктивном построении некоторой математической дисциплины должна непосредственно усматриваться на основании наглядной очевидности.

Постепенному изменению точки зрения относительно очевидности аксиом способствовали и другие разделы математики, возникшие в XIX в. Здесь можно назвать в качестве примера геометрию пространств сколь угодно большой размерности — четырех-, пяти-, шести- и вообще n -мерных пространств. В конце XIX в. для целей анализа стали изучать бесконечномерные пространства. Отсюда возникла такая важная как для теории, так и для приложений в физике область математики, как функциональный анализ.

Существенно перестроилась алгебра. Эта математическая наука перешла от изучения алгебраических операций над числами к изучению операций над элементами произвольной природы. Так возникли такие разделы алгебры, как теория групп, теория колец, теория полей, векторная алгебра, тензорная алгебра, теория структур и др., в которых изучаются самые общие закономерности алгебраических операций. В первой главе мы познакомились с так называемой булевой алгеброй, являющейся еще одним примером подобной алгебраической теории.

Наконец, в 80-х гг. XIX в. немецким математиком Г. Кантором была создана теория абстрактных множеств, изучающая самые общие свойства бесконечных множеств объектов произвольной природы.

Все эти новые области имеют дело с очень отвлеченными и мало наглядными конструкциями. Тем не менее, как показало развитие математики и ее приложений в физике — особенно в атомной физике, — именно подобные абстрактные разделы дают зачастую тот математический аппарат, который необходим для описания закономерностей действительности. Наглядность и очевидность исходных понятий и утверждений не являются больше критерием правильности и полезности математических построений. Но тогда совершенно особое значение приобретает логическая строгость математических теорий. Очень важным становится явная формулировка всех аксиом и посылок.

4. В качестве примера формальной системы аксиом для геометрии приведем отрывок из знаменитой книги Д. Гильберта «Основания геометрии», в котором формулируется часть основных аксиом. Этот труд, вышедший первым изданием в 1899 г., является в некотором смысле завершением критической перестройки аксиоматического построения элементарной геометрии, предпринятого в XIX в. после возникновения неевклидовой геометрии. Наша цитата относится к первой главе, в которой излагаются аксиомы плоской и пространственной геометрии. Изложение начинается так:

«Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем *точками* и обозначаем A, B, C, \dots ; вещи второй системы мы называем *прямыми* и обозначаем a, b, c, \dots ; вещи третьей системы мы называем *плоскостями* и обозначаем $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; точки называются также *элементами линейной геометрии*, точки и прямые — *элементами плоской геометрии*, точки, прямые и плоскости — *элементами пространственной геометрии* или *элементами пространства*.

Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «*лежать*», «*между*», «*конгруэнтный*», «*параллельный*», «*непрерывный*». Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается *аксиомами геометрии*.

Аксиомы геометрии мы можем разбить на пять групп. Каждая из этих групп выражает определенные, связанные друг с другом основные результаты нашего опыта. Мы будем называть эти группы следующим образом:

- I 1—8 аксиомы *соединения (принадлежности)*,
- II 1—4 аксиомы *порядка*,
- III 1—5 аксиомы *конгруэнтности*,
- IV аксиома о *параллельных*,
- V 1—2 аксиомы *непрерывности*¹⁾.

После этого краткого вступления дается формулировка аксиом с краткими комментариями. Формулируются некоторые теоремы, содержащие понятия, введенные в аксиомах, и на основании аксиом даются доказательства

¹⁾ См. Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, стр. 56.

формулируемых теорем. Мы приведем только некоторые из аксиом, относящиеся к плоской геометрии, причем из I и II групп аксиом.

I_1 Для любых двух точек A, B существует прямая a , принадлежащая каждой из этих двух точек A, B .

I_2 Для двух точек A, B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B .

Здесь, как и в последующем, под двумя, тремя, ... точками (прямыми, плоскостями) всегда подразумеваются различные точки (прямые, плоскости).

Вместо термина «принадлежат» мы будем пользоваться также и другими формулировками. Например, вместо прямая a принадлежит каждой из точек A и B мы будем говорить: прямая a проходит через точки A и B или прямая a соединяет точку A с точкой B ; вместо A принадлежит a мы будем говорить: A лежит на a или A является точкой a и т. п. Если точка A лежит на прямой a и, кроме того, на прямой b , то мы будем говорить, прямые a и b пересекаются в точке A , имеют общую точку A и т. п.

На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой¹⁾.

Дальнейшие аксиомы этой группы относятся уже к пространственной геометрии; мы их приводить не будем. Между тем мы приведем аксиомы второй группы.

«Аксиомы этой группы определяют понятие «между» и делают возможным на основании этого понятия установить порядок точек на прямой, плоскости и в пространстве.

Точки прямой находятся в определенных отношениях друг с другом. Для описания этих отношений большей частью пользуются словом «между».

II_1 Если точка B лежит между точкой A и точкой C , то A, B, C суть три различные точки прямой и B лежит также между C и A .

II_2 Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B .

¹⁾ См. Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, стр. 57.

II. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Кроме этих аксиом порядка на прямой (линейных аксиом порядка) необходима еще одна аксиома, относящаяся к порядку на плоскости.

О п р е д е л е н и е. Мы рассматриваем на прямой a две точки A и B ; систему двух точек A и B мы называем *отрезком* и будем ее обозначать через AB или BA . Точки, лежащие между A и B , называются *точками отрезка AB* или *точками*, расположенными (лежащими) *внутри* отрезка AB ; точки A и B называются концами отрезка AB . Все остальные точки прямой a называются точками, лежащими *вне отрезка*.

II. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC , не проходящая ни через одну из точек A, B, C ; если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB , то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC .

Выражаясь наглядно, говорят, «если прямая входит во внутрь треугольника, то она также выходит из треугольника». Тот факт, что прямая a не может при этом пересечь оба отрезка AC и BC , может быть доказан¹⁾.

На примере изложения Гильберта довольно ясно видно, в чем состоит существенное отличие формальной аксиоматики от содержательной. Характерной чертой формальной аксиоматики является то, что основные понятия не определяются и даже не описываются. Они представляют собой абстрактные объекты и абстрактные отношения: все свойства, которые в дальнейшем должны быть использованы, устанавливаются в аксиомах. В принципе свойства и отношения, сформулированные в аксиомах, совершенно произвольны. На них накладывается только требование непротиворечивости, т. е. невозможности вывода из них какого-либо утверждения A и его отрицания $\neg A$. Но, конечно, в действительности аксиомы выбираются так, чтобы они отражали какие-то существенные стороны действительности. Так сразу видно, что в аксиомах Гильберта сформулированы некоторые свойства и отношения, которые соответствуют привычному содержатель-

¹⁾ См. Д. Г и л ь б е р т, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, стр. 58—60.

ному пониманию. Но — и именно это важно подчеркнуть — после того как сами отношения и встречающиеся в них понятия абстрагированы от действительности, в формально аксиоматическом построении теории намеренно отвлекаются от содержательного понимания, и вопрос об истинности или очевидности аксиом уже больше не ставится. В самой математической теории изучаются только логические следствия из аксиом, принятых в качестве посылок.

Для уяснения современного понятия аксиоматической системы приведем еще один пример, на этот раз из области алгебры.

Важным предметом изучения алгебры являются области объектов, в которых привычным образом выполнимы четыре фундаментальных действия арифметики: сложение, вычитание, умножение и деление. Такие области с определенными на них операциями называются *полями*. Так, например, для указанных операций полем является совокупность всех рациональных чисел. Другим полем является множество вещественных чисел. Полями будут также множества комплексных чисел, множества рациональных функций с рациональными коэффициентами, т. е. выражения вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0},$$

где a_i и b_i — рациональные числа, и многие другие области, изучаемые в алгебре.

Строгое определение понятия поля описывается следующей системой аксиом:

Множество объектов произвольной природы называется полем, если для этих объектов определены две операции, первая из которых называется сложением и обозначается знаком $+$, вторая — умножением и обозначается знаком \cdot , так, чтобы при этом выполнялись следующие аксиомы.

1. Аксиомы для сложения:

1) операция сложения определена для любых пар объектов a и b и сопоставляет им некоторый объект c , называемый суммой: $a + b = c$;

2) $a + b = b + a$ — коммутативный закон для сложения;

3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативный закон для сложения;

4) существует однозначно определенный элемент, обозначаемый 0 и называемый нулем поля, такой, что для любого объекта a имеет место

$$a + 0 = a;$$

5) для каждого объекта a существует однозначно определенный объект, обозначаемый $-a$, такой, что

$$a + (-a) = 0.$$

II. Аксиомы для умножения:

1) операция умножения определена для любой пары объектов a и b и сопоставляет им некоторый объект c , называемый их произведением и обозначаемый $c = a \cdot b$.

2) $a \cdot b = b \cdot a$ — коммутативный закон для умножения;

3) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — ассоциативный закон для умножения;

4) существует однозначно определенный объект, обозначаемый 1 и называемый единицей поля, такой, что для всех объектов a имеет место

$$a \cdot 1 = a,$$

5) для всех объектов поля, отличных от 0, существует однозначно определенный объект a^{-1} такой, что

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

III. Распределительный закон:

для любых трех элементов поля a , b , c имеет место равенство

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Это аксиомы поля. Любые утверждения, которые записываются с помощью операций сложения и умножения и которые являются логическими следствиями вышеприведенных аксиом, — это теоремы теории поля. Теоремы представляют собой утверждения, которые выполняются в произвольном поле независимо от того, что представляют собой его элементы. Как и в случае аксиом геометрии, в приведенном примере аксиом поля сформулированы свойства и отношения, отражающие некоторые существ-

венные стороны привычных арифметических операций. Но после того, как эти требования абстрагированы от действительности, в формальном аксиоматическом построении намеренно отвлекаются от содержательного понимания: изучаются только логические следствия из принятых посылок. Можно сказать, что такая процедура довольно хорошо соответствует аристотелевскому пониманию дедуктивной науки и, например, изложение Гильберта в «Основаниях геометрии» больше отвечает аристотелевскому идеалу, чем «Начала» Евклида.

5. Остается еще одна существенная сторона аксиоматических построений в математике, которая до конца XIX в. оставалась в тени; она касается как раз связи с математической логикой. И в содержательных аксиоматических теориях, и в современных формальных теориях речь идет о логическом выводе одних утверждений из других. При этом вопрос о том, что представляет собой логический вывод, не ставился. Ясно было, что доказательство какой-либо теоремы, исходя из некоторого набора посылок-аксиом, состоит в построении цепочки промежуточных утверждений, каждое из которых получается из предыдущих применением некоторых логических законов. Но что представляют собой эти логические законы и как они применяются для преобразования одних утверждений в другие, нигде не описывалось и не уточнялось. А такое уточнение стало теперь необходимым.

Действительно, объекты и отношения, изучаемые в современной математике, как мы уже говорили, обладают большой степенью абстрактности и общности, и говорить об очевидности аксиом нет возможности. При выборе исходных положений — аксиом мы должны быть в первую очередь уверены, что логическими выводами мы не придем к абсурдным утверждениям. Иначе говоря, центральным вопросом обоснования какой-либо математической дисциплины ставится вопрос о непротиворечивости исходных посылок-аксиом. Мы не можем при этом ограничиться ссылкой на то, что аксиомы непротиворечивы в силу того, что они отражают некоторое положение вещей окружающего нас мира. Ведь формулируемые нами отношения и свойства объектов не являются точным отражением действительности, а являются далеко идущей идеализацией, при которой мы намеренно упрощаем картину. Нет никакой гарантии, что в результате такой абстракции

и идеализации формулируемые аксиомы не могут оказаться противоречивыми. Проблема стала особенно острой после того, как на рубеже XX в. в одной из самых основных областей математики — теории множеств, имеющей дело с самыми общими свойствами бесконечных множеств, — действительно выявились парадоксы: рассуждения о некоторых бесконечных множествах привели к логическим противоречиям. Возникновение этих парадоксов было вскоре удовлетворительно объяснено и были предложены различные логические процедуры, позволяющие их избегать. Возникшие при этом многочисленные и острые дискуссии заострили внимание многочисленных математиков на вопросах логического обоснования математики. Особенно обширные исследования в этом направлении были предприняты Д. Гильбертом и рядом его учеников и последователей: П. Бернайсом, Д. фон Нейманом, Ж. Эрбраном и др. В результате этого развития для решения основных вопросов, связанных с обоснованием математики, возникла новая математическая дисциплина — *метаматематика* или теория доказательств, опирающаяся существенно на понятия и методы математической логики — логику высказываний и логику предикатов.

Объектами изучения метаматематики являются дедуктивные математические теории. В ней исследуются свойства и отношения между системами аксиом, строение доказательств, взаимосвязь между теоремами. Среди основных проблем, которые должна решать метаматематика, особенно выделяются три: проблема непротиворечивости, проблема полноты, проблема разрешимости. Под этим понимается следующее. Пусть дан некоторый набор основных объектов и некоторых отношений между ними, описанных некоторой системой аксиом. Мы привели для этой ситуации уже ряд примеров. Так, в элементарной геометрии на плоскости имеются объекты, называемые точками и прямыми, которые связаны отношениями «точка P принадлежит прямой a », «точка B расположена между точками A и C » и некоторыми другими отношениями, которые мы не упоминали, эти отношения описаны в аксиомах. Аналогично в теории поля имеются некоторые объекты — элементы поля, связанные операциями сложения и умножения, также задаваемыми некоторой системой аксиом. В предшествующих главах мы встречались с другими аксиоматически определенными областями. В гл. I

мы выписали систему аксиом для алгебры Буля, играющей столь важную роль в логике высказываний, в § 6 гл. III мы привели аксиомы для отношения эквивалентности, отношения упорядоченности, функциональных отношений.

Итак, пусть мы имеем некоторую аксиоматически заданную область.

Проблема непротиворечивости состоит в выяснении непротиворечивости требований, сформулированных в аксиомах. Иначе говоря, нужно выяснить невозможность получения в качестве логических следствий двух утверждений A и $\neg A$. Заметим, что если система аксиом противоречива, т. е. из нее выводима какая-либо пара утверждений A и $\neg A$, то, как мы видели в § 3 гл. II, из нее выводимо произвольное утверждение, как истинное, так и ложное. Таким образом, интерес могут представлять только непротиворечивые системы аксиом.

Не менее важной является *проблема полноты* системы аксиом. Здесь требуется установить, достаточна ли система аксиом, чтобы из нее в качестве логических следствий выводились все истинные утверждения области.

Наконец, большое значение имеет следующая проблема, называемая *проблемой разрешимости*. Здесь требуется установить, существует или не существует некоторая эффективная процедура, которая для любого утверждения, формулируемого в терминах введенных объектов и отношений, устанавливает, выводимо или не выводимо это утверждение из заданных аксиом.

Для уточнения и решения указанных основных и ряда других сходных проблем в метаматематике Д. Гильбертом был предложен некоторый очень общий метод формализации процедуры логических заключений. Основным при этом является понятие формального вывода, с которым мы познакомились на очень частном и простом примере в § 3 гл. II.

Опишем этот метод в очень общих чертах для произвольного случая.

Для изучения некоторой аксиоматической теории строится некоторый общий «язык», который позволяет записывать любое утверждение данной теории как некоторую однозначно определенную последовательность знаков, в виде некоторой «правильно построенной формулы». Для построения такого языка можно использовать формульную

запись логики предикатов, как мы это показали на ряде примеров в § 6 гл. III¹⁾.

В качестве дальнейшего примера укажем еще формализацию утверждений теории поля. Для этого достаточно наряду с операциями логики высказываний и кванторами ввести в рассмотрение два трехместных предиката $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$, описывающих соответственно операции сложения и умножения: $S(x, y, z)$ принимает значение u в том и только в том случае, когда $x + y = z$, а $P(x, y, z) = u$, когда $x \cdot y = z$. Всякой формуле логики предикатов, в которой встречаются только предикаты S и P и в которой все переменные связаны кванторами, однозначным образом соответствует утверждение теории поля. При этом нужно особо выделить формулы, соответствующие вышеприведенным аксиомам поля. Мы не будем их выписывать все, а приведем только некоторые из них.

Аксиома I,1) для сложения гласит, что операция сложения сопоставляет произвольным двум элементам x и y некоторый элемент z — их сумму — и только один. Существование суммы выражается формулой

$$\forall x \forall y \exists z S(x, y, z), \quad (1)$$

а единственность — формулой

$$\forall x \forall y \forall z \forall w ((S(x, y, z) \wedge S(x, y, w)) \rightarrow (z = w)), \quad (2)$$

так что аксиома I,1) записывается как конъюнкция формул (1) и (2). Соответственно аксиома II,2) о существовании и единственности произведения выражается формулой

$$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z) \wedge \forall x \forall y \forall z \forall w ((P(x, y, z) \wedge \wedge P(x, y, w)) \rightarrow (z = w)). \quad (3)$$

Аксиома I,4) о существовании и единственности нуля выражается следующей конъюнкцией:

$$\exists y \forall x P(x, y, x) \wedge \forall y \forall z (\forall x (P(x, y, x) \wedge \wedge P(x, z, x)) \rightarrow (y = z)). \quad (4)$$

¹⁾ Заметим, что тот раздел теории предикатов, который мы описали в предыдущих главах — он называется «узким исчислением предикатов», — не вполне достаточен, чтобы описывать произвольные математические теории. Для многих областей нужно привлекать более высокие разделы теории предикатов, на которых мы в нашем элементарном и популярном изложении не останавливались.

Аналогично можно указать запись для других аксиом и для произвольных теорем теории поля. Приведем в качестве примера запись утверждения, которое будет уже теоремой, о существовании частного от деления z на x , если x не равно 0:

$$\forall x \forall z \exists y (\neg S(x, x, x) \rightarrow P(x, y, z)).$$

(В переводе на привычный язык: для произвольных x , y , z , если $x + x \neq x$, т. е. если $x \neq 0$, то существует такое y , что $x \cdot y = z$.)

Подобным же образом утверждения других аксиоматических теорий записываются в виде формул определенного вида.

При метаматематическом подходе к изучению какой-либо аксиоматической теории в основу исследования кладутся сами *записи утверждений*. Указывается некоторый набор элементарных знаков. (В случае поля это будут буквы для переменных x , y , z и т. д., буквы P и S , знаки для операций логики высказываний \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \sim , знаки для кванторов \forall , \exists , знак $=$ и скобки $(,)$.) Далее указываются правила, позволяющие из этих знаков образовывать правильно построенные формулы. Эти правила задаются так, чтобы те формулы, которые получаются в результате их применения, как раз соответствовали бы содержательным утверждениям теории как истинным, так и ложным. Некоторые правильно построенные формулы выделяются и объявляются аксиомами. Содержательно аксиомы — это формулы, которые являются записями тех утверждений, которые мы предполагаем истинными. Наконец, формулируются правила вывода — это некоторые механические правила оперирования со знаками, позволяющие преобразовывать правильно построенные формулы в правильно построенные формулы. Правила вывода формулируются так, чтобы они переводили содержательно истинные формулы в содержательно истинные и соответствовали логическим заключениям. После этого определяется основное свойство — выводимость формулы. Формула A называется выводимой из аксиом, если она получается из аксиом последовательным применением правил вывода. Последовательность промежуточных формул, получаемых при этом, называется выводом формулы A . Вывод формулы можно рассматривать как запись доказательства утверждения, соответствующего формуле.

Описанная процедура формализации математических теорий превращает исследование аксиоматических систем в исследование операций над конечными и в принципе вполне обозримыми совокупностями формул даже в том случае, когда в соответствующей содержательной теории речь идет о свойствах бесконечных множеств.

Этот метод позволяет уточнить понятие непротиворечивости, полноты и разрешимости, а для некоторых аксиоматических теорий решить соответствующие проблемы. Так, непротиворечивость некоторой системы аксиом после формализации означает невозможность вывода из соответствующей системы никаких двух формул A и $\neg A$. Соответственно полнота системы означает, что для любой замкнутой формулы должна быть выводима или формула A , или формула $\neg A$. Установление подобных фактов представляет из себя, правда, трудные, но вполне определенные математические задачи. И на этом пути за последние десятилетия были достигнуты важные результаты.

Одним из самых замечательных достижений явилось установление одного отрицательного факта. На пути исследования различных математических теорий было показано, что их обоснование сводимо к исследованию систем аксиом для элементарной арифметики натуральных чисел, с одной стороны, и теории множеств, с другой. Многочисленные математики, начиная с начала нашего столетия, занимались исследованием аксиоматического построения арифметики. В начале 30-х годов австрийским логиком К. Гёделем здесь был получен следующий результат отрицательного характера: никакая конечная система аксиом для элементарной арифметики не полна. Иначе говоря, какое бы мы ни написали конечное множество аксиом для арифметики, всегда найдется истинное арифметическое утверждение, которое не может быть доказано на основании этой системы. Этот замечательный результат и различные его обобщения имеют далеко идущие следствия для современной математики и находятся в центре внимания математической логики. В нашем популярном изложении не представляется возможным осветить его в достаточной мере. Вообще наш краткий экскурс в проблематику оснований математики может дать об этой области только очень обедненную и приблизительную картину.

ЛИТЕРАТУРА

Читателю, желающему более детально ознакомиться с математической логикой и с ее применениями, мы рекомендуем читать и изучать довольно обширную литературу по этой области. Мы помещаем ниже небольшой список книг и статей, непосредственно примыкающих к изложенному нами материалу. Некоторые из указанных трудов содержат в свою очередь подробную библиографию.

Последовательное и строгое изложение основных положений математической логики читатель найдет в [6], [11], [18], [22], [25], [26]. Применениям математической логики к кибернетике и теории автоматов посвящены книги [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9], [12], [13], [16], [20], [23], [26]. Аристотелевская силлогистика подробно обсуждается в [15]. Вопросы оснований математики отражены в [5], [10], [11]; но, вообще говоря, эти вопросы пока плохо отражены в монографической литературе. Философские проблемы математической логики трактуются в статьях в [14], [19], [21], [28], а также в «Философской энциклопедии» [29].

1. «Автоматы», Сборник статей, ИЛ, 1956.
2. М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розинер, И. М. Смирнова, А. А. Таль, Логика, автоматы, алгоритмы, Физматгиз, 1963.
3. Э. Беркли, Символическая логика и разумные машины, ИЛ, 1960.
4. М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, Изд-во АН СССР, 1950.
5. Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.
6. Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, 1947.
7. В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, Успехи матем. наук, т. 16, вып. 1, 1961, стр. 3—62.
8. В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, 1962.
9. В. М. Глушков, Введение в кибернетику, Изд-во АН УССР, 1964.
10. В. Ф. Каган, Основания геометрии, тт. I и II, Гостехиздат, 1949.
11. С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.
12. Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтеиброт, Введение в теорию конечных автоматов, Физматгиз, 1961.

13. С. Колдуэлл, Логический синтез релейных устройств, ИЛ, 1961.
14. Логические исследования, Сборник статей, Изд-во АН СССР, 1959.
15. Я. Лукасевич, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, ИЛ, 1959.
16. Г. К. Моисил, Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств, ИЛ, 1963.
17. A. Nakashima, The Theory of Relay circuit composition, Nippon Electr. Commun. Eng., 1936, № 3, 197—226.
18. П. С. Новиков, Элементы математической логики, Физматгиз, 1959.
19. Применения логики в науке и технике, Изд-во АН СССР, 1960.
20. Проблемы кибернетики, тт. 1—10, Физматгиз, 1957—1964.
21. Проблемы логики, Сборник статей, Изд-во АН СССР, 1963.
22. А. Тарский, Введение в логику и методологию дедуктивных наук, ИЛ, 1948.
23. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 51 (Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики), Изд-во АН СССР, 1958.
24. В. А. Успенский, Лекции о вычислимых функциях, Физматгиз, 1960.
25. А. Чёрч, Введение в математическую логику, ИЛ, 1960.
26. В. И. Шестаков, Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класса А, Канд. диссертация НИИФ, МГУ, 1938.
27. C. E. Shannon, Symbolic Analysis of Relay and switching circuitry, Trans. AIEE, 1938, v. 57, 713—722.
28. Философские вопросы современной формальной логики, Сборник статей, Изд-во АН СССР, 1962.
29. Философская энциклопедия, Изд-во «Советская энциклопедия», т. 1, 1960, т. 2, 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
 Глава первая	
Логика высказываний	8
§ 1. Элементы логики высказываний	8
§ 2. Логические операции	11
§ 3. Булевы функции	20
§ 4. Нормальные формы. Алгебра Буля	30
§ 5. Применения алгебры логики в теории релейно- контактных схем и в теории автоматов	38
 Глава вторая	
Тождественно истинные формулы логики высказываний	50
§ 1. Значение тождественно истинных формул для логики высказываний	50
§ 2. Примеры тождественно истинных формул логики высказываний	57
§ 3. Формальный вывод тождественно истинных формул логики высказываний	60
 Глава третья	
Логика предикатов	71
§ 1. Предикаты	71
§ 2. Применение операций логики высказываний к предикатам	85
§ 3. Кванторы	89
§ 4. Преобразования формул логики предикатов. Предваренная нормальная форма	96
§ 5. Суждения и силлогизмы	101
§ 6. Применение выражений логики предикатов для описания некоторых отношений	120
 Заключение	
Основания математики и математическая логика . .	130
Литература	149

Лев Аркадьевич Калужник

Что такое математическая логика

М., 1964 г., 152 стр. с илл.

Редактор В. В. Донченко.

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод.

Корректор Г. Г. Желтова.

Сдано в набор 1/IX 1964 г. Подписано к печати 5/XI 1964 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 4,75. Условн. печ. л. 7,79. Уч.-изд. л. 7,03. Тираж 42 000 экз. Т-17005. Цена книги 21 коп. Заказ № 1895.

Издательство «Наука».

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография

имени А. А. Жданова Главполиграфпрома

Государственного комитета

Совета Министров СССР по печати.

Москва, Ж-54, Валовая, 28.